Das Ideale Gasmodell (IGM)

T. Fließbach[1]

Einführung

- Gas aus Atomen oder Molekülen
- Lotto
- Modell $\longleftrightarrow$ Realität

Anwendungen

- Gas aus Photonen
- Gas aus Elektronen
  - Kompressibilität der Materie
  - Weißer Zwerg

[1] Vortrag vom 20.1.1993

Mein Thema lautet: Das Ideale Gasmodell.

Anhand dieses Modells möchte ich demonstrieren, wie Physiker mit einfachen Ideen relativ komplexe Systeme beschreiben und erklären.

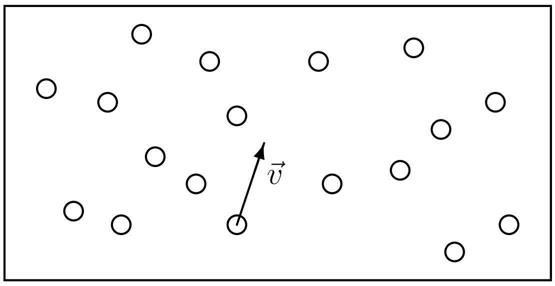
Bei 'Gas' wird man zunächst an ein gewöhnliches Gas aus Atomen oder Molekülen denken. Hierfür kennen Sie vermutlich das *ideale Gasgesetz.*

Ich beginne mit der Diskussion der Annahmen, die zum Idealen Gasmodell führen. Diese Annahmen können mit denen verglichen werden, die man benötigt, um die Gewinnchancen beim Lotto zu berechnen. Aus diesen Annahmen folgt dann das ideale Gasgesetz.

Den einführenden Teil schließe ich mit einigen Bemerkungen zum Verhältnis zwischen Modell und Realität ab.

Der Anwendungsbereich des Idealen Gasmodells geht weit über gewöhnliche Gase hinaus. Dies werde ich im zweiten Teil anhand ausgewählter Beispiele demonstrieren.

Gewöhnliches Gas



Volumen $V = 30\,\mathrm{l}$

$N = 10^{24}$ Moleküle

Durchmesser der Teilchen: etwa $3\,\text{Å}$
$(1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m})$

Mittlerer Abstand: etwa $30\,\text{Å}$

Raumausfüllung: $0.1\ \%$

Mittlere Geschwindigkeit: $v \approx 400\,\mathrm{m/s}$

Mittlere Stoßzeit: $10^{-10}\,\mathrm{s}$

Newtonsche Bewegungsgleichungen für 10^{24} Teilchen:

- Lösung unmöglich
- Lösung uninteressant

Von Interesse: Globale Eigenschaften (wie Dichte, Druck)

$$10^{24} \text{ Teilchen} \quad \xrightarrow{?} \quad \text{Druck } P$$

Modellannahmen:

1. IG–Annahme: Die Wechselwirkung zwischen den Teilchen wird nicht berücksichtigt.
2. Statistische Annahme: Alle möglichen Zustände sind gleichwahrscheinlich.

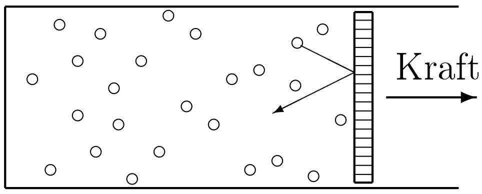
- $E = N\,\frac{m\,\overline{v^2}}{2}$ (Nur kinetische Energie)
- Jedes Teilchen ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jedem Ort in V.
- Alle Werte von v_x, v_y und v_z sind gleichwahrscheinlich — unter der Einschränkung $E = \text{const.}$.

Die *Temperatur* ist (bis auf einen Faktor) die mittlere Energie pro Teilchen:

$$\frac{m}{2}\,\overline{v^2} = \text{const.} \cdot T$$

Es wäre sinnvoll, die Temperaturskala durch const. = 1 festzulegen, und T in Joule zu messen. Historisch wurde die Temperaturskala jedoch anders festgelegt (Celsius- und Kelvinskala). Eine mittlere Geschwindigkeit von $400\,\text{m/s}$ entspricht Zimmertemperatur, also $T = 300\,\text{K}$.

Ideales Gasgesetz



Reflexionen an der Wand
$\rightarrow$ viele einzelne Kraftstöße
$\rightarrow$ mittlere Kraft
Druck P = Kraft/Fläche

<u>Theorie:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Gaskasten}\\ N,\,V,\,T\end{array}} \xrightarrow[\text{(+ Mathematik)}]{\text{Modellannahmen}} \boxed{\begin{array}{l}P = \text{const.}\,\dfrac{N}{V}\,T\\ \text{Ideales Gasgesetz}\end{array}}$$

<u>Praxis:</u>

P, T sind Meßgrößen. Bei Erwärmung steigt der Druck:

$$\begin{array}{rcl} T = 300\,\mathrm{K} & \longrightarrow & T' = 330\,\mathrm{K} \\ P = 3\,\mathrm{bar} & \longrightarrow & P' = 3.3\,\mathrm{bar} \end{array}$$

Diese Aussage des idealen Gasgesetzes ist falsifizierbar.

Lotto

49 Kugeln anstelle von 10^{24} Atomen

Wie beim Gas: Die Bewegung der Kugeln ist durch Newtonsche Bewegungsgleichungen bestimmt. Die Lösung dieser Gleichungen ist unmöglich und uninteressant.

Modellannahme:

Jede Kugel ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jedem möglichen Ort (etwa dort, wo eine Kugel zu einem bestimmten Zeitpunkt herausfällt).

Theorie:

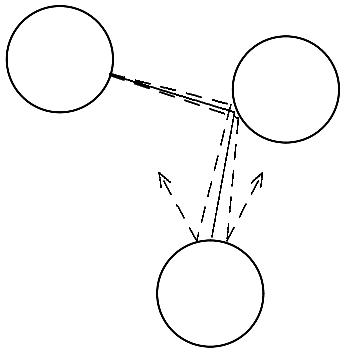
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lotto-}\\ \text{apparat}\end{array}} \xrightarrow[\text{ähnlich zum IGM}]{\text{Modellannahmen}} \boxed{\begin{array}{c} p = \dfrac{1}{49} \\ \text{Gewinnchancen}\end{array}}$$

Praxis:

p ist Meßgröße.

Zum Beispiel experimentelle Bestimmung von p_6 beim Trickwürfel; hier ist die Annahme $p_6 = 1/6$ leicht zu falsifizieren.

Warum funktioniert die statistische Annahme?



Billard, Lotto, Gas

Kleine Unterschiede
wachsen sehr schnell an

<u>Zwar:</u>

$$\boxed{\text{Anfangszustand}} \xrightarrow[\text{Bewegungsgesetz}]{\text{Deterministisches}} \boxed{\text{Späterer Zustand}}$$

<u>Aber:</u>

Die mögliche Eingrenzung des Anfangszustands enthält sehr viele (unmittelbar) benachbarte Zustände, die sich schnell auseinander entwickeln.

Auch: Kleine Störung $\longrightarrow$ etwas anderer Zustand $\longrightarrow$ ganz anderer Zustand.

Resultat: Das System verhält sich trotz deterministischer Bewegungsgleichungen

chaotisch, zufällig, nichtvorhersehbar

Hierfür sind keine Quanten- oder Wärmefluktuationen erforderlich.
Man kann auch in einer Welt mit $\hbar = 0$ und bei $T = 0$ würfeln!

Modell $\longleftrightarrow$ Realität

Die Beziehung zwischen dem IGM und einem realen Gas ist typisch für physikalische Modelle.

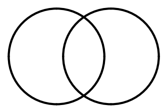
1. Modell gibt *wesentliche* Eigenschaften der Realität wieder.

   – Luftdruck, Gewinnchancen

2. Modell *idealisiert* die Realität.

   – Reales Gas, nicht-symmetrischer Würfel

   Grundannahmen im einzelnen falsch

3. Modell *verkürzt* die Realität.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gas: Bahnen von}\\ 10^{24}\text{ Teilchen}\end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l}\text{Relation zwischen}\\ P \text{ und } T\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Lotto: Bewegung der 49}\\ \text{Kugeln, andere Aspekte}\end{array}\right\} \longrightarrow p = 1/49$$

Anwendungen des IGM

Gas: System aus vielen Teilchen (Atomen, Photonen, Elektronen, ...) mit schwacher gegenseitiger Wechselwirkung.

IG-Näherung: Wechselwirkungen werden nicht (explizit) berücksichtigt.

IG-Näherung bedeutet eine entscheidende Vereinfachung. IGM ist Startpunkt für zahlreiche Vielteilchensysteme.

Beispiele:

Teilchen	IGM führt zu
Nukleonen	Schalenmodell des Atomkerns
Elektronen	Schalenmodell des Atoms
Elektronen	Metall: Spezifische Wärme
Elektronen	Weißer Zwerg: Sterngleichgewicht
Photonen	Heiße Materie: Strahlungsspektrum
Phononen	Festkörper, Spezifische Wärme
Magnonen	Ferromagnet, Spezifische Wärme
⋮	⋮

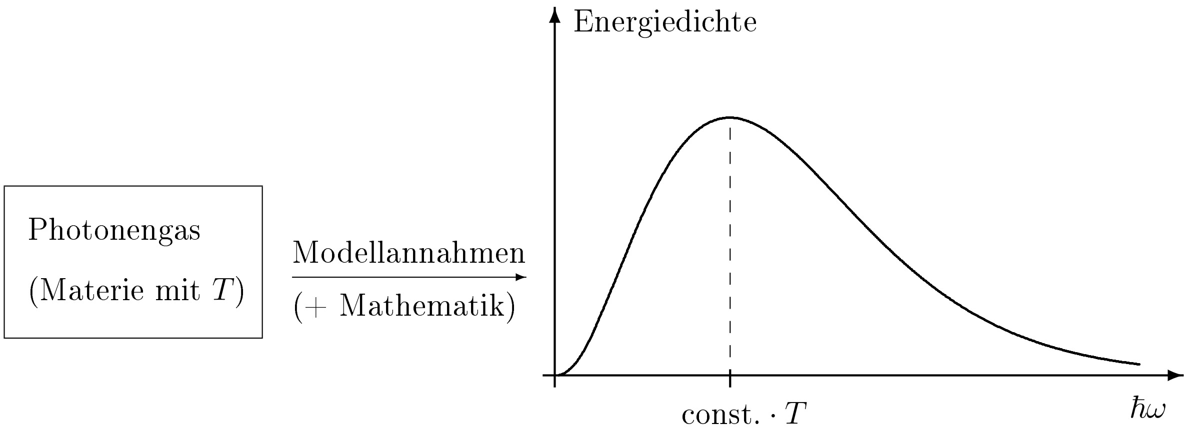
Teils mit, teils ohne statistische Annahme.

Gas aus Photonen

Photon: Energiequant des elektromagnetischen Feldes

Energie eines Photons: $\varepsilon = \hbar\omega$, Frequenz ω.

Wechselwirkung der Photonen untereinander extrem klein ('sehr ideal'). Statistisches Photonengas ('alle Zustände sind gleichwahrscheinlich') stellt sich im Kontakt mit Materie der Temperatur T ein.



$$\hbar\overline{\omega} = \text{const.} \cdot T = m\,\overline{v^2}/2$$

Die *Plancksche Strahlungsverteilung* des idealen Photonengases kommt zum Beispiel vor in:

- Eisen: Bei Erhitzung von $T = 1000\,\mathrm{K}$ auf $T = 2000\,\mathrm{K}$ wird rotglühendes Eisen weißglühend.
- Sonne: Sonnenlicht hat eine solche Frequenzverteilung. Dabei ist $T = 6000\,\mathrm{K}$ die Temperatur des Plasmas in der Sonnenoberfläche.
- Weltraum: Die *kosmische Hintergrundstrahlung* stammt aus der Frühzeit des Universums. Sie ist durch eine heutige Temperatur $T = 2.7\,\mathrm{K}$ charakterisiert.

Gas aus Elektronen ohne thermische Anregungen

$$\varepsilon = \frac{m\,v^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Energie ε, Impuls $p = mv$

Pauliprinzip: Nur 1 Elektron pro Zustand. Effektives Volumen pro Teilchen daher $V/N = (\Delta x)^3$.

Unschärferelation: Elektronen haben einen Impuls der Größe

$$p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \frac{\hbar}{(V/N)^{1/3}}$$

Ideales Elektronengas:

$$E_{\mathrm{el}} = N\,\frac{p^2}{2m} \approx \frac{N}{2m}\,\frac{\hbar^2}{(V/N)^{2/3}}$$

(keine potentielle Energie, keine thermischen Anregungen)

Das Ergebnis

$$E_{\mathrm{el}} \propto \frac{1}{V^{2/3}}$$

bedeutet Widerstand gegen Kompression.

Kompression eines Festkörpers

Die Größe der Atome ist bestimmt durch das Gleichgewicht zwischen Coulombkräften und der kinetischen Energie aufgrund der Unschärferelation (+Pauliprinzip).

Ein Festkörper kann aufgefaßt werden als Anordnung aus Atomkernen und einem Gas aus Elektronen. Dieses Gas ist sehr verschieden vom idealen Elektronengas. Aber: Die Ursachen für den Widerstand gegen Kompression sind dieselben, nämlich Pauliprinzip + Unschärferelation.

Bei einer Kompression muß Energie aufgewandt werden. Aus $E_{\mathrm{el}} \propto 1/V^{2/3}$ erhält man

$$V \to \frac{V}{2} \quad \text{ergibt} \quad E_{\mathrm{el}} \to 2^{2/3}\, E_{\mathrm{el}} \approx 1.6\, E_{\mathrm{el}}$$

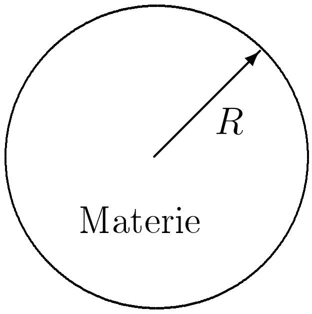
Die kinetische Energie eines Elektrons im Atom oder Festkörper ist $E_{\mathrm{el}}/N \sim 10\,\mathrm{eV}$. Daraus folgt

Kompression zu $V/2$ erfordert etwa $6\,\mathrm{eV}$ pro Elektron.

Eine energiereiche chemische Reaktion ergibt $1\,\mathrm{eV}$ pro Molekül, also wesentlich weniger.

Thermische Anregungen (ungefähr $\mathrm{eV}/40$ bei $T = 300\,\mathrm{K}$) spielen keine wesentliche Rolle.

Stern



$$E_{\text{grav}} \approx -\frac{GM^2}{R}$$

Masse M, Radius R
Gravitationskonstante G

Gravitation versucht, den Stern zu komprimieren.
Sterngleichgewicht: Gravitationsdruck = Materiedruck

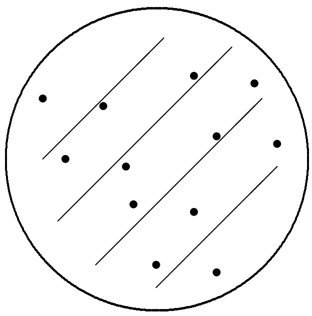
Sonne

Materiedruck ist thermischer Druck:

$$P = \text{const.} \cdot \frac{N}{V}\, T, \qquad T \approx 10^7\,\text{K}$$

Die Temperatur T (im Zentrum der Sonne) wird durch die Verbrennung von Wasserstoff zu Helium erzeugt.

Mögliches Endstadium: Relativ kalte, große Heliumkugel.



Neues Gleichgewicht:
Gravitationsdruck = Druck des Elektronengases

2 Elektronen pro He-Kern
$P_{\text{therm}} \approx 0$

Weißer Zwerg

Der Druck des Elektronengases hält der Gravitation die Waage.

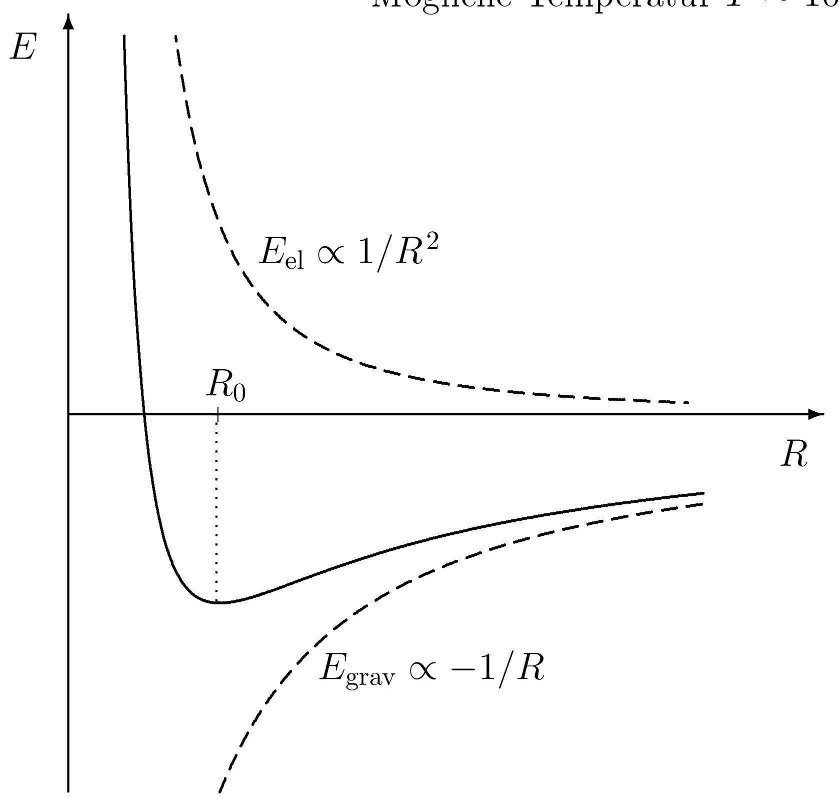
$$E_{\mathrm{el}} \approx \frac{N}{2m} \frac{\hbar^2}{(V/N)^{2/3}} \;\propto + \frac{1}{R^2}$$

$$E_{\mathrm{grav}} \approx - \frac{GM^2}{R} \;\propto - \frac{1}{R}$$

Gleichgewicht: $\quad E(R) = E_{\mathrm{grav}}(R) + E_{\mathrm{el}}(R) = \text{minimal}$

$M \approx M_\odot$ ergibt $R_0 \approx R_\odot/100 \approx R_{\mathrm{Erde}}$ (Zwerg)

Mögliche Temperatur $T \sim 10^4\,\mathrm{K}$ (weiß)



Chandrasekhar-Grenzmasse

Weißer Zwerg: Größere Masse — Stärkere Kompression — V/N kleiner — Impuls $\hbar/\Delta x$ größer und schließlich **relativistisch**:

$$\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \approx \begin{cases} mc^2 + \dfrac{p^2}{2m} + \ldots & (v \ll c) \\ cp + \ldots & (v \approx c) \end{cases}$$

$$E_{\text{el}} \approx N\varepsilon \approx Ncp \approx \frac{N\hbar c}{(V/N)^{1/3}} \approx \frac{N^{4/3}\,\hbar c}{R} \;\propto + \frac{1}{R}$$

$$E_{\text{grav}} \approx -\frac{GM^2}{R} \;\propto -\frac{1}{R}$$

Stabilität erfordert: $\quad N^{4/3}\,\hbar c > GM^2$

$M = 2Nm_{\text{N}}$ (2 Elektronen pro He-Kern mit mit 4 Nukleonen der Masse m_{N})

Wir setzen $N = M/(2m_{\text{N}})$ in die Stabilitätsbedingung ein und lösen nach M auf (numerische Faktoren werden vernachlässigt):

$$\boxed{M < \left(\frac{\hbar c}{G\,m_{\text{N}}^2}\right)^{3/2} m_{\text{N}} = M_{\text{C}}}$$

Die Masse eines Weißen Zwergs muß kleiner als die Grenzmasse

$$M_{\mathrm{C}} = \left(\frac{\hbar c}{G\, m_{\mathrm{N}}^2}\right)^{3/2} m_{\mathrm{N}}$$

sein (Chandrasekhar 1930). Numerisch erhält man

$$\frac{\hbar c}{G\, m_{\mathrm{N}}^2} = \frac{\text{Stärke der Kernkraft}}{\text{Stärke der Gravitationskraft}} \approx 10^{40}$$

und

$$M_{\mathrm{C}} \approx 10^{60}\, m_{\mathrm{N}} \approx 1.3\, M_{\odot}$$

Konstanten der Mikrophysik bestimmen eine Sternmasse!

Modell: Ideales relativistisches Quantengas.

Anmerkungen

Seite 3: Mittlere freie Weglänge: 1000 Å

Seite 4: $m\,\overline{v^2} = 3k_\mathrm{B}T$. Die Temperatur wird in Kelvin (K) gemessen. Dann ist die Boltzmann-Konstante $k_\mathrm{B} = 1.4 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$.

Für die so definierte *absolute* Temperatur gilt $T \geq 0$. Der absolute Nullpunkt $T = 0\,\mathrm{K}$ liegt auf der Celsiusskala bei $-273.15\,°\mathrm{C}$; eine Temperaturdifferenz $1\,\mathrm{K}$ (Kelvin) ist gleich $1°\mathrm{C}$ (Grad Celsius).

Seite 5: $P = k_\mathrm{B}\,(N/V)\,T$

Im Sonnenschein steige die Temperatur eines Autoreifens von 27 °C auf 57 °C. Dann nimmt der Druck von 2 atü auf 2.3 atü zu. Dabei wird konstantes Volumen angenommen (gilt nur näherungsweise).

Das Ideale Gasgesetz wird in der Nähe des Kondensationspunkts ganz falsch.

Seite 6: Ein Trickwürfel hat einen zur 1 verschobenen Schwerpunkt. Vielleicht ist eine der Lottokugeln doppelt so schwer?

Seite 7: Billard: Dreiband ist bereits schwierig. Sind zehn Karambolagen (selbst ohne Reibung) noch spielbar? Fließender Übergang zu Lotto.

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind deterministisch. Beim Lottoapparat treten dabei vorgegebene Kräfte (Drehen des Apparats) auf.

Anfangszustand: Unter anderem genaue Positionierung der Anfangslage der Lottokugeln; sicher unbestimmt auf der Skala $10^{-3}\,\mathrm{mm}$.

Kleine Störung: Husten einer Person im Fernsehstudio, Spannungsschwankung (Antrieb Lottomaschine).

Die Atmosphäre (Wetter) ist ein vergleichbares chaotisches System. Chaotisches Verhalten ist in der klassischen Physik seit langem bekannt (Poincaré).

Seite 8: ‘Wesentlich’ hängt vom Standpunkt ab.

Mitnahme der Zweiteilchen-Korrelation führt zum van der Waals-Gesetz.

Realität sind auch ganz andere Aspekte, wie etwa die Enttäuschung des Lottospielers am Samstagabend. Diese Realität ist allerdings nicht Gegenstand der Bemühungen der Physiker.

Seite 9: Starke Wechselwirkung zwischen Atomen: Es liegt kein Gas vor, sondern eine Flüssigkeit oder ein Festkörper. Mit der statistischen Annahme werden implizit Stöße vorausgesetzt (Seite 7); die zugehörige Wechselwirkung wird im IG aber nicht explizit (etwa in der Energie) berücksichtigt.

Das Schalenmodell wird meist nur bei $T = 0$ betrachtet (Grundzustand).

Seite 10: Die Wechselwirkung zwischen Photonen ist sehr schwach: Man betrachte die sich kreuzenden Strahlen zweier Taschenlampen.

Wiensches Verschiebungsgesetz: $h\omega_{\max} = 2.82\, k_{\mathrm{B}}T$. Das Analogon zur Planckschen Strahlungsverteilung ist die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung beim gewöhnlichen Gas.

Weitere Ergebnisse des IGM für Photonen: $P = \text{const.} \cdot T^4$, $E = \text{const.} \cdot T^4$ und Stefan-Boltzmanngesetz.

Eisen: Der sichtbare Teil liegt hierfür deutlich rechts vom Maximum. Erst für $T \approx 10^4\,\mathrm{K}$ liegt das Maximum der Strahlungsverteilung im Sichtbaren.

Weltraum: Heutiges Alter $t_0 \approx 1.5 \cdot 10^{10}$ Jahre. Für $t \le t_{\mathrm{e}} \approx 4 \cdot 10^5$ war die Strahlung mit der (ionisierten) Materie im Gleichgewicht. Wegen $t_{\mathrm{e}} \sim 10^{-6}\, t_0$ ist dies ein *sehr frühes* Stadium des Universums. Bei der Expansion des Weltraums sinkt die Temperatur der Planckschen Verteilung, die Form der Verteilung bleibt aber erhalten. Vorhersage der Hintergrundstrahlung 1949 von Alpher und Herman, Entdeckung 1965 durch Penzias und Wilson.

Seite 11: Für $k_{\mathrm{B}}T \ll \varepsilon$ spielt die thermische Bewegung keine zentrale Rolle.

Seite 12: Sehr grobe Abschätzung. Der Gewinn an Coulombenergie wird den Wert von 6 eV etwa halbieren.

Die Gründe für die (relative) Inkompressibilität gelten auch für die gegenseitige Undurchdringlichkeit von Festkörpern.

Seite 13: Der Gravitationsdruck der Atmosphäre beträgt in Meereshöhe etwa 1 bar. Dies ist im Gleichgewicht gleich dem Materiedruck, also dem Gasdruck der Luft.

Die Atomkerne liefern keinen wesentlichen Beitrag zum Druck; die quantenmechanische Minimalenergie ist umgekehrt proportional zur Masse.

Seite 14: Die Temperatur des Weißen Zwergs ist für das Gleichgewicht ohne Bedeutung. Auch $T = 0$ ist möglich, aber dann ist der Stern nicht sichtbar.

Seite 15: Die Ruhenergie mc^2 ist für das Sterngleichgewicht eine unwesentliche Konstante (hängt nicht vom Volumen ab).

Der Beitrag der Elektronen zur Sternmasse M kann vernachlässigt werden.

Seite 16: Die Grenzmasse wurde von Chandrasekhar mit 19 Jahren berechnet. Konstanten der Mikrophysik: $\hbar$ und m_{N}.

Für $M > M_{\mathrm{C}}$ ist der Weiße Zwerg kein möglicher Endzustand des Sterns. In einem Doppelsternsystem könnte ein Weißer Zwerg Materie von seinem Partner ansaugen und sich so M_{C} nähern. Für $M \to M_{\mathrm{C}}$ kommt es zu einem *Gravitationskollaps*. Ein Gravitationskollaps eines Sterns (auch anderer Sterntypen) wird als *Supernova* beobachtet. Er wird eingeleitet durch die Reaktion $\mathrm{e}^- + \mathrm{p} \to \mathrm{n} + \nu_{\mathrm{e}}$, die ab einer kinetischen Elektronenenergie von $1.5\, mc^2$ möglich ist. Diese Reaktion führt zu einem Zusammenbruch des Drucks des Elektronengases.