

Das gravitomagnetische Feld der Erde

von T. Fließbach

1. Einführung

magnetisch – gravitomagnetisch

2. Bezugssysteme

Bevorzugte Inertialsysteme

3. Newton und Mach

Absoluter Raum?

4. Drehung eines Foucault-Pendels

Machsche Vermutung

5. ART: Relativistische Theorie der Gravitation

Relativitätsprinzip

Gravitomagnetisches Feld

Größe des Effekts

Drehung des lokalen Inertialsystems

6. Einstein und Mach

7. Satelliten-Experiment

8. Ausblick

1. Einführung

Coulombkraft

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Gravitationskraft

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Für bewegte Ladungen/Massen erhält man

Coulombkraft

relativistische

Elektrodynamik

Gravitationskraft

Verallgemeinerung

ART

Magnetfeld: Kräfte auf bewegte Ladungen

Gravitomagnetisches Feld: Kräfte auf bewegte Massen

2. Bezugssysteme

Bahnkurve $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ erfordert Bezugssystem

Billard in verschiedenen Bezugssystemen

Billard und physikalische Gesetze sind besonders einfach in bestimmten nicht-beschleunigten Systemen, den

Inertialsystemen

3. Newton und Mach

Newton (1643 – 1727):

IS nicht-beschleunigt gegenüber absolutem Raum

Eimerversuch

Mach (1838 – 1916):

IS nicht-beschleunigt gegenüber den anderen Massen

Pirouettenversuch

Mach in *Die Mechanik* zu Newtons Eimer:

„Der Versuch Newtons mit dem Wassergefäß lehrt nur, . . . , dass die Zentrifugalkräfte durch die Relativbewegung gegen die Masse der Erde und die übrigen Himmelskörper geweckt werden. Niemand kann sagen, wie der Versuch quantitativ und qualitativ verlaufen würde, wenn die Gefäßwände immer dicker und massiger, zuletzt mehrere Meilen dick würden.“

4. Drehung eines Foucault-Pendels

Experimentelle Überprüfung von Mach?

Eimer am Nordpol ?

Besser: Foucault-Pendel am Nordpol

Drehung aufgrund der Erdrotation:

$$\Omega_{\text{Pendel}} \sim \frac{|\Phi|}{c^2} \omega_{\text{Erde}} = \frac{g R_E}{c^2} \omega_{\text{Erde}} \approx 7 \cdot 10^{-10} \omega_{\text{Erde}}$$

Experimenteller Nachweis ???

Theorie: **ART**

5. Allgemeine Relativitätstheorie (ART)

Galileis Relativitätsprinzip:

„Alle Inertialsysteme sind gleichwertig.“

(Grundlegende Gesetze sind in allen IS von derselben Form.)

Einstein:

„Ja, und die Lichtgeschwindigkeit ist in allen IS gleich.“

(Das ändert die Transformationen zwischen verschiedenen IS.)

IS: Ruhende Ladung, Masse

IS': Bewegte Ladung, Masse

Relativitätsprinzip:

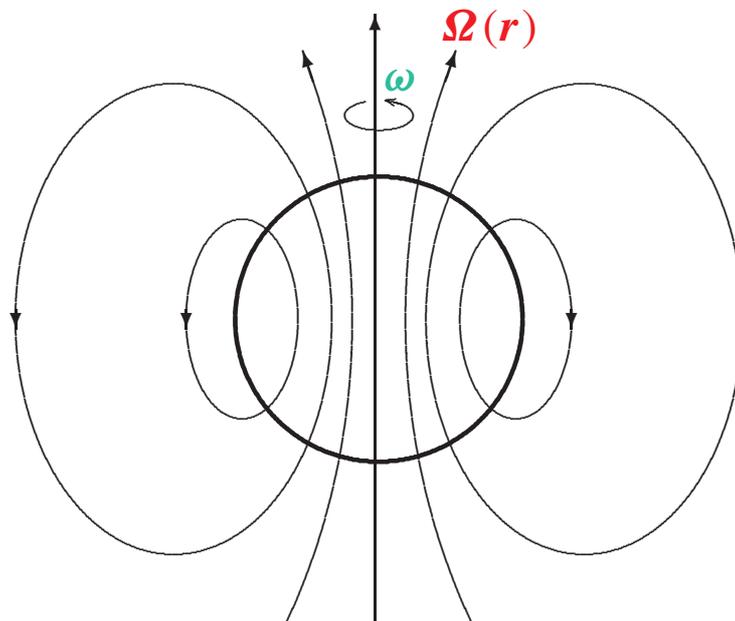
Grundlegende Gesetze müssen beide Fälle enthalten. Relativistisches Gesetz beschreibt zwangsläufig auch Effekte von **bewegten** Ladungen und Massen, also das magnetische und das gravitomagnetische Feld.

Die Kräfte auf ein Teilchen (Masse m , Ladung q) im magnetischen und im gravitomagnetischen Feld wirken in gleicher Form:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} - 2m \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$$

Die Berechnung des Magnetfelds $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und des gravitomagnetischen Felds $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r})$ erfolgt in gleicher Weise. Man erhält ein Dipolfeld:

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) = \frac{2GM R_E^2}{5c^2} \frac{3(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} r^2}{r^5}$$



Das Teilchen sei das Gewicht des Foucaultschen Pendels:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{Pendel}} = \boldsymbol{\Omega}$$

Vergleiche: Ladung oszilliert hin und her, senkrecht dazu gibt es ein \mathbf{B} -Feld.

Foucault-Pendel für 1 Jahr am Nordpol:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{\text{Pendel}} &= \boldsymbol{\Omega} \cdot 1 \text{ a} = \frac{4}{5} \frac{g R_E}{c^2} \omega_{\text{Erde}} \cdot 365 \text{ Tage} \\ &= \frac{4}{5} 7 \cdot 10^{-10} 2\pi \cdot 365 \approx 0.2''\end{aligned}$$

Thirring-Lense-Effekt (1918)

Die Schwingungsebene eines Pendels ist konstant in einem Inertialssystem (IS). Also:

Das lokale IS dreht sich mit $\boldsymbol{\Omega}$ (Mach!)

(frame dragging)

6. Einstein und Mach

1913: Einstein schreibt an Mach:

„Hoch geehrter Herr Kollege!

... erfahren Ihre genialen Untersuchungen ... eine glänzende Bestätigung ... ganz im Sinne Ihrer Überlegungen zum Newtonschen Eimerversuch. ...

Rotiert eine träge Kugelschale um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse, so entsteht im Inneren der Schale ein Coriolis-Feld, d.h. die Ebene des Foucault-Pendels wird (mit einer allerdings praktisch unmessbar kleinen (Winkel-) Geschwindigkeit) mitgenommen. ...“

1918: Einstein prägt den Terminus *Machsches Prinzip* für das Programm

Massen \rightarrow Metrik ($g_{\mu\nu}$) \rightarrow (Lokale) IS

auf der Grundlage der Feldgleichungen der ART

Später äußert sich Einstein zunehmend kritischer zu Mach

Zürich. 25. VI 13.

Hoch geehrter Herr Kollege!

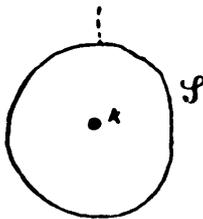
Dreien Tage haben Sie wohl meine neue Arbeit über Relativität und Gravitation erhalten; die nach unendlicher Mühe und quälendem Zweifel nun endlich fertig geworden ist. Nächstes Jahr bei der Sommerferien soll sich zeigen, ob die Lichtstrahlen in der Sonne gekrümmt werden, ob u. a. W. die zugrunde gelegte fundamentale Annahme von der Äquivalenz von Beschleunigung des Bezugssystems einerseits und Schwerfeld andererseits wirklich zutrifft.

Wenn ja, so erfahren Ihre genauen Untersuchungen über die Grundlagen der Mechanik-Planck's ungerichteter Kritik zum Trotz - eine

glänzende Bestätigung. Denn es ergibt sich mit Notwendigkeit, dass die Trägheit in einem Art-Wechselwirkung der Körper ihren Ursprung hat, ganz im Sinne Ihrer Überlegungen zum Newton'schen Zimer-Versuch.

Eine erste Konsequenz im diesem Sinne finden Sie oben auf Seite 6 der Arbeit. Es hat sich ferner folgendes ergeben:

- 1) Beschleunigt man eine kreisförmige Kugelschale S , so erfährt nach der Theorie ein von ihr eingeschlossener Körper eine beschleunigende Kraft
- 2) Rotiert die Schale S um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse (relativ zum System der Fixsterne (Restsystem)), so entsteht im Innern der Schale ein Coriolis-Feld, d. h. ^(die "Bewegung") ~~das~~ Foucault-Pendel wird ^(mathematisch) ~~mit~~ ^{immer} ~~allerdings~~ ⁱⁿ ~~immer~~ ^{erster} ~~Ordnung~~ ^{Ordnung} ~~genommen~~ ^{genommen} (Es ist nur eine grosse Täuschung, Ihnen dies mittelst zu können, zumal jene kritische Darstellung vor schon immer höchst ungerecht fertig erschienen war.



Mit grösster Hochachtung grüsst Sie herzlich

Ihr ergebener u. dankbarer

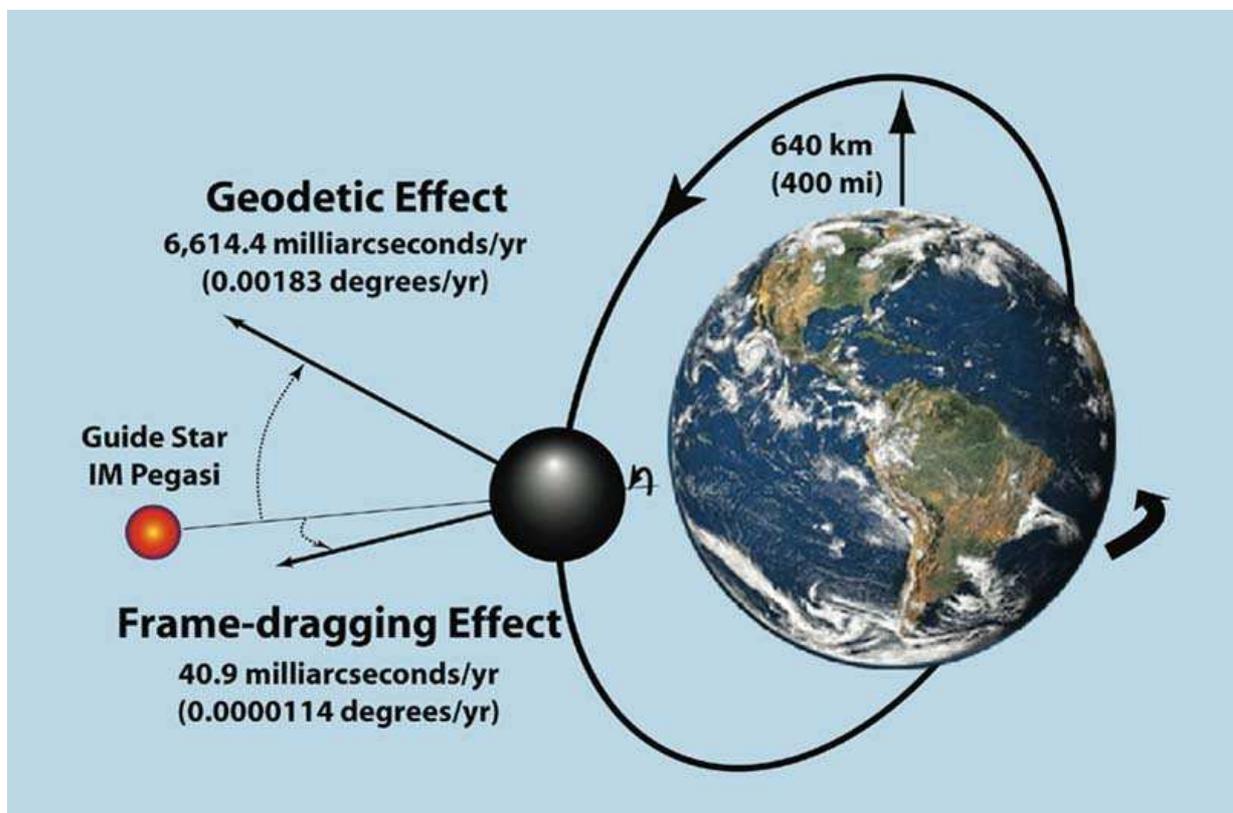
Sie dankt Ihnen herzlich für die Übersendung Ihres Buches

7. Satelliten-Experiment

Das lokale IS dreht sich mit Ω .

→ Der Drehimpuls L eines kräftefreien Kreisels dreht sich mit Ω .

Stanford Gyroscope oder **Gravity Probe B Experiment**



1961: Erster Antrag an NASA, 1973 „under construction“

Gyroskop: Quarzkugel, $\varnothing = 4$ cm
mit supraleitender Oberflächenschicht

Drehimpuls L durch Rotation mit 170 Hz

London-Moment $\mu_{\text{magn}} \parallel L$

Messung von $\Delta\mu_{\text{magn}}$ mit SQUIDS

Einige Details:

4 Gyroskope bei $T = 1.8$ K

Kreislaufhängung: $\tau_{\text{relax}} \sim 3000$ Jahre

Abschirmung des Magnetfelds der Erde durch
supraleitende Hülle (2000 Liter Helium)

Polare Route, Winkeländerung relativ zu Fixstern

Ausführung: April 2004 bis Ende 2005

Homepage: <http://einstein.stanford.edu/>

Ziel: Messung des gravitomagnetischen Felds der Erde

8. Ausblick

Aus theoretischer Sicht bestehen keine Zweifel, dass das Experiment Einsteins Voraussagen bestätigen wird.

Nur linearisierte Gleichungen.

Indirekte Bestätigungen der gravitomagnetischen Kräfte durch LAGEOS (genau vermessene Satellitenbahnen) und PSR 1913 + 16 (Periastrondrehung).

Mach aus heutiger Sicht

Machprinzip ist mehrdeutig
keine allgemein verbindliche Definition

Zum Beispiel: H. Bondi and J. Samuel listen in
The Thirring-Lense-Effect and Mach's Principle
(gr-qc/9607009)

[zehn verschiedene Versionen](#) des Machschen Prinzips auf.

ED: Lösung aus Quellen?

Aber: Wellenlösungen, Randbedingungen

ART: Quellen und Randbedingungen zu $g_{\mu\nu}$?

Probleme: Lösung trägt zu Quellen bei. Die Angaben der Quellverteilung macht gewisse Voraussetzungen (Koordinaten und Metrik) über die Lösung. Kompliziert.

Machs Ideen aus heutiger Sicht auch wesentlich falsch:

Insbesondere: „[Raum ist bloße Hilfsgröße](#)“

Stattdessen:

[Gravitationswellen sind Anregungsmoden der Raum-Zeit](#)

Machs Ideen teilweise widersprüchlich und obskur,
aber eben auch prophetisch:

„Niemand kann sagen, wie der Versuch verlaufen würde,
wenn die Gefäßwände immer dicker würden“