# Vorwort

Dieses Buch enthält eine kurze Einführung in die relativistische Mechanik. Dabei stehen die Bewegungsgleichungen für ein Masseteilchen im Mittelpunkt. Es richtet sich an Studenten, die bereits erste Erfahrungen (Vorlesung, Lehrbuch) mit der Relativitätstheorie in der Mechanik und Elektrodynamik haben. Alle Größen und Gleichungen werden aber soweit erklärt, dass jeder der Diskussion folgen kann.

Die relativistischen Bewegungsgleichungen können als Verallgemeinerung des 2. Newtonschen Axioms aufgefasst werden. Dabei findet man in der Literatur häufig folgendes Rezept für diese Verallgemeinerung: Man ersetzt die Masse $m$ des Teilchens durch die relativistische Masse $m_{\text{rel}} = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$; dabei ist $v$ die Geschwindigkeit des Teilchens, und $c$ die Lichtgeschwindigkeit.

In vielen Fällen funktioniert dieses Rezept $m \to m_{\text{rel}}$. Auch für das Verständnis der Ergebnisse kann die durch $m_{\text{rel}}(v)$ beschriebene effektive Trägheit hilfreich sein. Das Rezept $m \to m_{\text{rel}}$ ist aber nicht allgemein gültig: Es gibt korrekte Newtonsche Bewegungsgleichungen, die mit diesem Rezept zu falschen Ergebnissen führen.

Für unsere Diskussion werden zunächst die relevanten Konzepte der relativistischen Mechanik eingeführt. Dies kann man auch in meinen Lehrbüchern nachlesen (insbesondere Teil IX *Relativistische Mechanik* in meiner *Mechanik* [1] und Teil IV meiner *Elektrodynamik* [2]). Auf dieser Grundlage kann dann die Frage nach der Relevanz der relativistischen Masse beantwortet werden. Ein wichtiger Gesichtspunkt ist dabei die Logik, mit der physikalische Gesetze mit Hilfe von Symmetrieprinzipien verallgemeinert werden. Dieser Gesichtspunkt spielt auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) [3,4] eine zentrale Rolle.

Lisa Edelhäuser vom Springer-Verlag hat den Anstoß zu diesem kleinen Buch gegeben und seine Fertigstellung konzeptionell und inhaltlich begleitet. Hans Walliser gilt mein Dank für wertvolle Hinweise und Vorschläge. Fehlermeldungen, Bemerkungen und sonstige Hinweise sind jederzeit willkommen, etwa über den Kontaktlink auf meiner Homepage `www2.uni-siegen.de/~flieba/`. Auf dieser Homepage finden sich auch eventuelle Korrekturlisten.

August 2018 Torsten Fließbach

# Literaturangaben

[1] T. Fließbach, *Mechanik*, 7. Auflage, Springer-Spektrum 2017

[2] T. Fließbach, *Elektrodynamik*, 6. Auflage, Springer-Spektrum 2012

[3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley 1972

[4] T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, 7. Auflage, Springer-Spektrum 2016

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einführung und Überblick

Newtons 2. Axiom beschreibt die Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluss einer Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$:

$$\frac{d}{dt}\big(m\,\boldsymbol{v}(t)\big) = \boldsymbol{F}_{\mathrm{N}} \qquad \text{(in IS)} \tag{1.1}$$

Dabei ist $\boldsymbol{v}(t)$ die von der Zeit $t$ abhängige Geschwindigkeit des Teilchens. Das betrachtete Teilchen wird idealisiert als Massenpunkt mit der Masse $m$ betrachtet. Ein Massenpunkt ist ein Körper, für dessen Bewegung nur sein Ort relevant oder von Interesse ist, zum Beispiel die Erde im Keplerproblem.

Newtons Axiom ist zum einen eine Aussage über die Bewegung. Zum anderen definiert (1.1) die Masse als *Messgröße*: Eine bestimmte, in ihrer Größe unbekannte Kraft wirke auf zwei Körper 1 und 2. Wir messen die Beschleunigungen $a_1 = dv_1/dt$ und $a_2 = dv_2/dt$, die durch die Kraft hervorgerufen werden. Nach (1.1) ist das Verhältnis $m_1/m_2$ durch $a_2/a_1$ gegeben; damit ist $m_1/m_2$ als Messgröße festgelegt. Wir definieren nun willkürlich die Masse eines bestimmten Körpers als eine Masseneinheit, konkret das Kilogramm (kg). Damit ist die Masse $m$ als Messgröße definiert. Bei bekannter Masse stellt (1.1) dann auch eine Vorschrift zur Messung der Kraft dar.

In der relativistischen Mechanik wird (1.1) verallgemeinert zu

$$\frac{d}{d\tau}\big(m\,u^\alpha(\tau)\big) = F^\alpha \qquad \text{(in IS)} \tag{1.2}$$

Dabei ist $d\tau = dt/\gamma$ mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, und $(u^\alpha) = (u^0, u^1, u^2, u^3) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$ ist die Vierergeschwindigkeit. Damit sind $m$, $u^\alpha$ und $d\tau$ definiert, während die Minkowskikraft $(F^\alpha) = (F^0, F^1, F^2, F^3)$ ein noch zu spezifizierender Vektor ist.

Beide Gleichungen, (1.1) und (1.2), beziehen sich auf Inertialsysteme (IS) als ausgezeichnete Bezugssysteme. IS sind Systeme, die gegenüber den Massen im Universum nicht beschleunigt sind. Verschiedene IS können sich also relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. In Nicht-IS sind die Bewegungsgleichungen komplizierter, es treten etwa zusätzliche Terme auf (zum Beispiel in der Form einer Corioliskraft in rotierenden Bezugssystemen).

Das von Galilei aufgestellte Relativitätsprinzip (RP) behauptet die Gleichwertigkeit aller IS. In der modifizierten Einsteinschen Formulierung des RP werden die Galileitransformationen zwischen verschiedenen IS durch die Lorentztransformationen (LT) ersetzt (Kapitel 2). Die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) stellt die zugehörigen Gesetze auf, die forminvariant unter LT sind.

Für die formale und vollständige Ableitung von (1.2) geht man davon aus, dass Gleichung (1.1) im Grenzfall $v \to 0$ auch relativistisch gültig ist (im momentanen Ruhsystem IS$'$). Mit den in Kapitel 2 eingeführten Lorentztransformationen zwischen verschiedenen IS erhält man dann die relativistischen Bewegungsgleichungen in beliebigen IS (Kapitel 3). Dies legt auch die Minkowskikraft $F^\alpha$ fest.

Vielfach findet man in der Literatur die Aussage, dass man in (1.1) lediglich die Masse $m$ durch die *relativistische Masse*

$$m_{\rm rel}(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{1.3}$$

ersetzen muss, um die korrekte relativistische Gleichung zu erhalten. Für dieses Rezept $m \to m_{\rm rel}$ schreibt man (1.1) so, dass die Masse unter der Zeitableitung steht. Ansonsten kann die zeitunabhängige Masse $m$ in (1.1) und (1.2) genauso gut vor der Zeitableitung stehen.

Die Anwendung des Rezepts $m \to m_{\rm rel}$ würde ausgehend von $\boldsymbol{F}_{\rm N}$ in (1.1) die Minkowskikraft $F^\alpha$ in (1.2) festlegen. Die Frage nach der Gültigkeit des Rezepts $m \to m_{\rm rel}$ ist daher mit der Frage verknüpft, wie die Kräfte in (1.1) und (1.2) zusammenhängen. Kapitel 4 untersucht die Relation zwischen der Newtonschen Kraft $\boldsymbol{F}_{\rm N}$ und der Minkowskikraft $(F^\alpha)$. Das ist auch deshalb von Interesse, weil man in der Literatur hierzu unterschiedliche Angaben findet.

Kapitel 5 bewertet die physikalische und die praktische Bedeutung der relativistischen Masse. Kapitel 6 fasst die Beurteilung der relativistischen Masse zusammen: Natürlich steht es einem frei, den Begriff der relativistischen Masse $m_{\rm rel}$ einzuführen. Die relativistische Masse hat ein wohldefiniertes Verhalten unter Lorentztransformationen, und sie ist bis auf einen konstanten Faktor gleich der Energie des bewegten Teilchens. Das Rezept $m \to m_{\rm rel}$ zur Aufstellung der relativistischen Bewegungsgleichung führt in vielen, aber nicht in allen Fällen zum richtigen Ergebnis. Das Rezept $m \to m_{\rm rel}$ ist daher nicht allgemein gültig.

Die Grundlage dieser Untersuchungen ist eine Einführung in die relevanten Aspekte der Speziellen Relativitätstheorie (SRT). Dazu gehören das Relativitätsprinzip, die Lorentztransformationen und Lorentztensoren, und die relativistische Bewegungsgleichung (Kapitel 2 und 3). Die zentrale Diskussion über die Gültigkeit des Rezepts $m \to m_{\rm rel}$ beginnt dann in Kapitel 4. Unser Thema mit den Eckpunkten (1.1) bis (1.3) liegt auf dem Gebiet der Mechanik. Wichtige und instruktive Anwendungen beziehen sich aber auf elektromagnetische Kräfte (Lorentzkraft), und zwar auch deshalb, weil die Elektrodynamik eine relativistische Theorie ist. Für diesen Zweck gibt Anhang A eine Einführung in die kovariante Formulierung der Maxwellgleichung und stellt dabei die für unsere Diskussion notwendigen Beziehungen auf.

Für eine erste Lektüre dieses Buchs empfehle ich die Kapitel 2 bis 6 (ohne die Abschnitte 2.5 und 5.3). Leser mit Vorkenntnissen könnten sich auch direkt Kapitel 4 ansehen, das den zentralen Punkt dieses Buchs mit wenigen Formeln erklärt.