2. Übung Mathe III Bauing SS 15

1.a) AWP $y' = x^2 + y^3$, $y(0)=1$ Taylorreihenansatz: Mit

$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{(j)}(0)}{j!} x^j$ und $y(0)=1$ und $y'(0) = 0 + y(0)^3 = 1$ sind

schon die ersten zwei nicht verschwindenden Koeffizienten bestimmt: $y'' = \frac{d}{dx}(x^2 + y(x)^3) = 2x + 3y^2 y' \Rightarrow y''(0) = 3 \cdot y(0)^2 y'(0)$

$\Rightarrow y''(0) = 3$, $y''' = \frac{d}{dx}(2x + 3y^2 y') = 2 + 6y(y')^2 + 3y^2 y''$

$\Rightarrow y'''(0) = 2 + 6 + 9 = 17 \Rightarrow y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)x^3 + \ldots$

$\Rightarrow y(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{6}x^3 + \ldots$

b) $y'' + 2xy' + 2y = 0$ $y(0)=1$, $y'(0)=0$

Reihenansatz $y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \Rightarrow y' = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1}$, $y'' = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2}$

Wegen $y(0) = a_0 = 1$ und $y'(0) = a_1 = 0$ sind die ersten Koeff. der Reihe bestimmt. Setzt man die Reihenentwicklung in die Dgl ein, dann folgt

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_j x^{j-2} + 2x\sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} + 2\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)a_j x^{j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} 2(j+1)a_j x^j = 0$$ Indextransformation

$j-2 = l$ $j = l+2$ $j = l$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+2)(l+1)a_{l+2}x^l + \sum_{l=0}^{\infty} 2(l+1)a_l x^l = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty}\left[(l+2)(l+1)a_{l+2} + 2(l+1)a_l\right]x^l \equiv 0 \Rightarrow$$

$(l+2)(l+1)a_{l+2} + 2(l+1)a_l = 0$ für alle $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow \boxed{a_{l+2} = -\frac{2}{l+2}a_l} \quad (\ast) \text{ (Rekursionsformel)}$$

Wegen $a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{2}{3}a_1 = 0$ induktiv $a_{2j+1} = 0$

Wegen $a_0 = 1 \Rightarrow a_2 = -\frac{2}{2+0}a_0 = -1$ $a_4 = a_{2+2} = -\frac{2}{2+2}a_2 = \frac{1}{2}$

$a_6 = a_{4+2} = -\frac{2}{4+2}a_4 = -\frac{1}{3}a_4 = -\frac{1}{2\cdot 6}$

Beh.: $a_{2j} = (-1)^j \frac{1}{j!}$ Nachweis durch Induktion

1. Anfang: $j=0$: $a_0 = (-1)^0 \frac{1}{0!} = 1$ ✓
2. Die Beh. sei richtig für ein $j \geq 0$, also $a_{2j} = \frac{(-1)^j}{j!}$
3. dann ist $a_{2(j+1)} = a_{2j+2} = -\frac{2}{2j+2}a_{2j} = -\frac{1}{j+1}\frac{(-1)^j}{j!}$

$\Rightarrow a_{2(j+1)} = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}$ ✓

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}x^{2j} = e^{-x^2}$$

2)

Lösung des AWP's $\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 - 1 \\ y_2' &= -y_1 + y_2 \end{aligned}$ $\quad \vec{y}' = \overset{A}{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}\vec{y} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Homogene $\vec{y}' = A\vec{y}$

Eigenwerte $\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)^2+1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$ Eigenvektoren

$\lambda_1 = 1+i \Rightarrow \begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{cc|c} -i & 1 & \\ -1 & -i & \cdot i \\ \hline 0 & 0 & \end{array} \Rightarrow -i a_1 + a_2 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = i$

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$

$\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} e^{(1+i)x} = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} e^x(\cos x + i \sin x)$. Da das System reelle Koeff. besitzt, ist die zweite Lösung $\vec{Y}_2 = \overline{\vec{Y}_1} = \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} e^{(1-i)x}$

reelle Lösungen $\vec{y}_1 = \mathrm{Re}\,\vec{Y}_1 = e^x\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}$ $\quad \vec{y}_2 = \mathrm{Im}\,\vec{Y}_1 = e^x\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$

und $y_h = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2$. Eine partikuläre Lösung des inhom. Systems $\vec{y}' = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\vec{y} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ erhält man mit dem Ansatz

$\vec{y}_p = \begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}_p{}' = \vec{0} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} d_1 + d_2 &= 1 \\ d_1 - d_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow d_1 = d_2 = +\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_p = +\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{y} = c_1 e^x\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix} + c_2 e^x\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = -\frac{1}{2}$ $\quad \vec{y} = -\frac{1}{2}\left[e^x\begin{pmatrix}\cos x + \sin x\\ \cos x - \sin x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]$

Mit $\vec{y}' = \vec{f}_1(x,\vec{y}) = \begin{pmatrix}\cos x & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\vec{y} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (1)

und $\vec{y}' = \vec{f}_2(x,\vec{y}) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\vec{y} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (2)

gilt $\|\vec{f}_1 - \vec{f}_2\| \le 0{,}02$ für $|x| \le 0{,}2$

und $\|\vec{f}_1(x,\vec{y}_1) - f_1(x,\vec{y}_2)\| \le 2\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$ Lipschitzkonstante $L = 2$ gewählt.

Ist nun $\vec{y}$ Lösung von (1) und $\vec{y}^*$ Lösung von (2), so gilt $\|\vec{y}(x) - \vec{y}^*(x)\| \le \varepsilon\,\delta\, e^{L|x-0|}$ mit $\delta \ge |x|$; $\delta \le 0{,}2$

$\varepsilon = \|\vec{f}_1 - \vec{f}_2\| \le 0{,}02$

$\Rightarrow \left|\vec{y}(x) + \frac{1}{2}e^x\left[\begin{pmatrix}\cos x + \sin x\\ -\sin x + \cos x\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]\right| \le 0{,}004\, e^{0{,}4}$

3a) $y'' = (y')^2 + 1 \qquad y(0)=0,\ y(4)=1$

Subst. $u = y' \Rightarrow u' = u^2+1 \quad \frac{du}{dx} = u^2+1 \Rightarrow \frac{du}{u^2+1} = dx$

$\Rightarrow \int \frac{du}{u^2+1} = \int dx \Rightarrow \arctan u = x + c \Rightarrow u = y' = \tan(x+c_1)$

$\Rightarrow y(x) = -\int \frac{-\sin(x+c_1)}{\cos(x+c_1)}\,dx = -\ln|\cos(x+c_1)| + c_2$

Da $\cos(x+c_1)$ für $0 \le x \le 4$ mindestens eine Nullstelle besitzt, ist das Randwertproblem nicht lösbar, da $y(x)$ für $0 \le x \le 4$ singulär wird.

b) $y'' + a^2 y = \sin x \quad , y(0) = y(2\pi) = 0$

Bestimmung der allgemeinen Lösung:

I $\quad a = 0 \Rightarrow y'' = \sin x \Rightarrow y' = -\cos x + c_1 \quad , y = c_1 x + c_2 - \sin x$

$y(0) = c_2 = 0 \qquad y(2\pi) = c_1 \cdot 2\pi = 0 \Rightarrow y = -\sin x$

II $\quad a \neq 0 \quad$ Hom. Dgl. $y'' + a^2 y = 0 \quad$ Ansatz $y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + a^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm a i \Rightarrow y_h = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax)$

Zur Lösung der inhomogenen Dgl. durch Ansatz muß der Fall $a = \pm 1$ (Resonanzfall) gesondert betrachtet werden.

$a \neq \pm 1 \quad$ Ansatz $y_p = \alpha \sin(x) \quad$ (nur gerade Abl. in Dgl.)

$y_p'' = -\alpha \sin x \Rightarrow \alpha(a^2-1)\sin x = \sin x \Rightarrow \alpha = \frac{1}{a^2-1}$

$y_p = \frac{1}{a^2-1}\sin x \Rightarrow y = y_h + y_p = c_1 \cos(ax) + c_2 \sin(ax) + \frac{1}{a^2-1}\sin x$

$y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 \sin(ax) + \frac{1}{a^2-1}\sin x$

$y(2\pi) = c_2 \sin(a 2\pi) = 0$ dann muß entweder $c_2 = 0$ sein oder aber $a \cdot 2\pi = k\pi$, also $a = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Damit erhält man

$y = \frac{1}{a^2-1}\sin x \quad$ für $a \neq \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$y = c_2 \sin(ax) + \frac{1}{a^2-1}\sin x \quad$ fü $a = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Bleibt noch der Resonanzfall: $a = \pm 1$

Dann ist $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y_p = \alpha x \cos x + \beta x \sin x \quad , y_p' = \alpha \cos x + \beta \sin x - \alpha x \sin x + \beta x \cos x$

$y_p'' = -2\alpha \sin x + 2\beta \cos x - \alpha x \cos x - \beta x \sin x$

$y_p'' + y_p = -2\alpha \sin x + 2\beta \cos x = \sin x \Rightarrow \beta = 0 \quad \alpha = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{2} x \cos x \quad , y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$

$y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$

$y(2\pi) = -\pi \cos 2\pi = -\pi \neq 0 \Rightarrow$ Randwertproblem ist nicht lösbar.