3.Aufgabenblatt Mathematik III für Bauingenieure, Master 11.05.2015

Abgabe Mo. 25.05.2015 , 12.15 Uhr vor der Vorlesung

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu folgenden Randwertproblemen

   a) $y'' + 2y' + (1 + \mu)y = 0\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y(2) = 0\ ,$

   b) $xy'' - 3y' + (4 + \mu)x^{-1}y = 0\ ,\ y(1) = 0\ ,\ y(e^{2\pi}) = 0\ .$

[3,3]

2. Lösen Sie für $u(x, y)$ das Randwertproblem

$$yu_x - xu_y = 0\ ,\ u(x, 0) = e^x\ .$$

Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$yu_x - xu_y = 0\ ,\ u(x, \sqrt{1 - x^2}) = x$$

keine Lösung besitzt.

[3,1]

3. Lösen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $u(x, y) = f(x)g(y)$ das Randwertproblem

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad u(0, y) = u(2\pi, y) = u(x, 0) = 0\ ,\ u(x, 1) = 2\sin(3x)$$

für das Rechteck $R = \{(x, y) | 0 \le x \le \pi\ ,\ 0 \le y \le 1\}\ .$

[3]

4. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{y - x} + 1 \quad , \quad y(-1) = 1\ .$$

Berechnen Sie dann eine Näherung für y(-0.8) indem Sie

das Runge-Kutta-Verfahren

mit Schrittweite $h = 0.1$ verwenden.

Führen Sie eine Zweitrechnung mit doppelter Schrittweite durch und geben Sie damit eine heuristische Fehlerabschätzung an.

Berechnen Sie die exakte Lösung und vergleichen Sie die heuristische Fehlerabschätzung mit dem wahren Fehler.

[5]

3. Übung Math. III Bauing SS 15 / Teil Dgln.

1a) $y'' + 2y' + (1+\mu) y = 0 \qquad y(0) = y(2) = 0$

homogene Lin. Dgl. 2. Ordnung mit konst. Koeff. Ansatz $y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow$ char. Gl. $\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-\mu}$

Ist $\mu < 0$, dann ist die allg. Lsg $y = c_1 e^{(-1+\sqrt{-\mu})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{-\mu})x}$

$y(0) = c_1 + c_2 = 0$, $\Rightarrow c_2 = -c_1$, $y(2) = c_1(e^{(-1+\sqrt{-\mu})2} - e^{(-1-\sqrt{-\mu})\cdot 2}) = 0 \quad \Rightarrow c_1 = 0$

$\Rightarrow$ keine negativen Eigenwerte

Ist $\mu = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \quad y = e^{-x}(c_1 + c_2 x) \quad y(0) = c_1 = 0$, $y(2) = 2c_2 e^{-2} = 0$

$\Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \mu = 0$ kein Eigenwert.

$\mu > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\mu} \quad \mu = \gamma^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i\gamma \quad (\gamma = \sqrt{\mu})$

$y = e^{-x}[c_1 \cos(\gamma x) + c_2 \sin(\gamma x)] \quad y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 e^{-x}\sin(\gamma x)$

Da nichttriviale Lösungen gesucht sind $\Rightarrow c_2 \neq 0$, also muß wegen $y(2) = c_2 e^{-2}\sin(2\gamma) = 0$ $\sin(2\gamma) = 0$ gelten also $2\gamma = j\pi$, mit $j \in \mathbb{Z}$, also $\gamma = j\frac{\pi}{2}$ ergibt die Eigenwerte $\mu_j = (\frac{\pi}{2}j)^2$ und Eigenfunktionen $f_j(x) = \sin(\frac{\pi}{2}j)x$, wobei $j \in \mathbb{N}$ ist.

b) $x^2 y'' - 3xy' + (4+\mu)y = 0$, $y(1) = 0$, $y(e^{2\pi}) = 0$

Euler-Dgl. 2. Ordnung $x > 0$ Ansatz $y = x^\lambda \Rightarrow xy' = \lambda x^\lambda$

$x^2 y'' = \lambda(\lambda-1)x^\lambda \Rightarrow$ char. Gl. $\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 4 + \mu = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 + \mu = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-\mu}$

Für $\mu = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \Rightarrow y = x^2(c_1 + c_2 \ln x)$, $y(1) = c_1 = 0$, $y(e^{2\pi}) = 2\pi c_2 = 0$

$\Rightarrow c_2 = 0$, also $\mu = 0$ kein Eigenwert.

$\mu < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-\mu}$ reelle einfache Nullstellen $\Rightarrow$

$y = c_1 x^{2+\sqrt{-\mu}} + c_2 x^{2-\sqrt{-\mu}} \quad y(1) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow y = c_1(x^{2+\sqrt{-\mu}} - x^{2-\sqrt{-\mu}})$

$y(e^{2\pi}) = c_1(e^{2\pi(2+\sqrt{-\mu})} - e^{2\pi(2-\sqrt{-\mu})}) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$, da $\mu \neq 0$.

Bleibt der Fall $\mu > 0$, $\mu = \gamma^2 \quad (\gamma = \sqrt{\mu})$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{\mu} = 2 \pm i\gamma \quad \Rightarrow y = x^2[c_1 \cos(\gamma \ln x) + c_2 \sin(\gamma \ln x)]$

$y(1) = c_1 = 0 \Rightarrow y = c_2 x^2 \sin(\gamma \ln x) \quad y(e^{2\pi}) = c_2 4\pi^2 \sin(2\pi\gamma) = 0$

$\Rightarrow$ (da $y \neq 0$ vorausgesetzt) $\sin(2\pi\gamma) = 0 \Rightarrow 2\pi\gamma = j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$.

und da $\sin(-x) = -\sin x$ genügt es $j \in \mathbb{N}$ zu wählen

$\Rightarrow \gamma = \frac{j}{2}$, also Eigenwerte $\mu_j = (\frac{j}{2})^2$ und Eigenfunktionen

$y_j(x) = \sin\frac{j}{2}(\ln x)$.

2) $y u_x - x u_y = 0$ ist eine homogene lineare part. Dgl. 1. Ordnung: Char. Dgl. $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \Rightarrow y\,dy = -x\,dx$
$\Rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow y^2 = -x^2 + c_1 \Rightarrow c_1 = x^2 + y^2 \Rightarrow$
$u_0(x,y) = x^2 + y^2$ ist eine Grundlösung. $\Rightarrow$
$u(x,y) = f(u_0) = f(x^2+y^2)$ (f stetig diffbar) ist die allg. Lösung. $u(x,0) = f(x^2) = e^x \Rightarrow x = \ln(f(x^2)) = \ln(e^x)$
$\Rightarrow f(x^2) = e^x \Rightarrow f(t) = e^{\sqrt{t}} \Rightarrow u(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ $x \geq 0$
Die Randbedingung
$u(x, \sqrt{1-x^2}) = x$ führt zu $u(x, \sqrt{1-x^2}) = f(x^2 + 1 - x^2) = f(1) = x$!
nicht erfüllbar, da $f(1)$ eine Konstante ist.

3) $\Delta u = 0$, $u(0,y) = u(2\pi, y) = u(x,0) = 0$, $u(x,1) = 2\sin(3x)$.
Separationsansatz: $u(x,y) = f(x)g(y) \Rightarrow u_{xx} = f''(x)g(y)$, $u_{yy} = f(x)g''(y)$
$\Rightarrow$ wegen $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ $f''(x)g(y) = -f(x)g''(y)$. Da die triviale Lösung $u=0$ nicht die 4. Randbedingung erfüllt, muß $f, g \not\equiv 0$ gelten, also
$\frac{f''}{f}(x) = -\frac{g''}{g}(y)$ gelten, so dass (1) $\frac{f''(x)}{f(x)} = k = -\frac{g''(y)}{g(y)}$ gelten muß: $\Rightarrow f'' - kf = 0$ (1) $\wedge$ $g'' + kg = 0$ (2) $k \in \mathbb{R}$
1. Fall $k = 0 \Rightarrow f'' = 0 \Rightarrow f(x) = \alpha x + \beta$ $u(x,y) = (\alpha x + \beta) g(y)$
$u(0,y) = \beta g(y) = 0 \Rightarrow \beta = 0$ $u(2\pi, y) = 2\pi\alpha\, g(y) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ Wid. zu $u \not\equiv 0$
2. Fall $k > 0$, $k = \gamma^2$ ($\gamma = \sqrt{k}$) $\Rightarrow f'' - \gamma^2 f = 0$, Ansatz $f = e^{\lambda x}$
$\Rightarrow \lambda^2 - \gamma^2 = 0$ $\lambda_{1,2} = \pm\gamma \Rightarrow f(x) = c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x}$
$u(x,y) = (c_1 e^{\gamma x} + c_2 e^{-\gamma x}) g(y)$ $u(0,y) = (c_1 + c_2) g(y) = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1$
$\Rightarrow u(x,y) = c_1 (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) g(y)$ $u(2\pi, y) = c_1 (e^{\gamma 2\pi} - e^{-\gamma 2\pi}) g(y) = 0$
$\Rightarrow c_1 = 0$ also wieder ein Widerspr. zu $u \not\equiv 0$.
Bleibt nur Fall 3: $k < 0$, also $k = -\gamma^2$ $\gamma = \sqrt{-k} > 0$.
$\Rightarrow f'' + \gamma^2 f = 0 \Rightarrow f(x) = c_1 \cos(\gamma x) + c_2 \sin(\gamma x)$
$u(x,y) = f(x)g(y)$ $u(0,y) = c_1 g(y) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$
$u(2\pi, y) = c_2 \sin(\gamma 2\pi) g(y) = 0 \Rightarrow (u \not\equiv 0)$ $\sin(2\gamma\pi) = 0$
$\Rightarrow 2\gamma \in \mathbb{Z}$ (und da $\gamma > 0$) $\gamma_j = \frac{j}{2}$, $j \in \mathbb{N}$ und somit sind $\mu_j = -\gamma_j^2 = -\left(\frac{j}{2}\right)^2$ die Eigenwerte des AWP's
und $f_j(x) = \sin\left(\frac{j}{2} x\right)$ die Eigenfunktionen
Berechnung der zugehörigen $g_j(y)$: Aus (2) folgt
$g'' - \gamma_j^2 g = 0$, $y = e^{\lambda y} \Rightarrow \lambda^2 - \gamma_j^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\gamma_j$
$\Rightarrow g_j(y) = d_1 e^{\gamma_j y} + d_2 e^{-\gamma_j y} = d_1 e^{\frac{j}{2} y} + d_2 e^{-\frac{j}{2} y}$
$u_j(x,y) = \left[d_1 e^{\frac{j}{2} y} + d_2 e^{-\frac{j}{2} y}\right] \sin\left(\frac{j}{2} x\right)$

Mit $u_j(x,0) = [d_1 + d_2] \sin(\frac{j}{2}x) = 0 \Rightarrow d_2 = -d_1$

$\Rightarrow u_j(x,y) = d_j [e^{\frac{j}{2}y} - e^{-\frac{j}{2}y}] \sin(\frac{j}{2}x) = 2 \bar{d}_j \sinh(\frac{j}{2}y) \cdot \sin(\frac{j}{2}x)$

$\Rightarrow$ Die Reihe $u(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sinh(\frac{j}{2}y) \sin(\frac{j}{2}x)$ ist eine Lösung, welche die ersten drei Randbedingungen erfüllt, sofern sie und ihre partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung innerhalb des Rechtecks R absolut konvergent sind.

wegen $u(x,1) = 2 \cdot \sin(3x)$ erfüllt aber schon $u_6(x,y) = d_6 \sinh 3y \cdot \sin(3x)$ die letzte Randbedingung $u(x,1) = d_6 \sinh 3 \sin 3x = 2 \sin(3x)$ für $d_6 = \frac{2}{\sinh 3}$ $\Rightarrow u(x,y) = \frac{2}{\sinh 3} \sinh(3y) \sin(3x)$.

ist Lösung des Randwertproblems. Die Theorie zeigt dann, dass diese Lösung die einzige ist.

4. $y' = \sqrt{y-x} + 1, \; y(-1) = 1$

a) Lösung subst. $u = y - x \Rightarrow u' = y' - 1, \; y' = u' + 1$

$\Rightarrow u' + 1 = \sqrt{u} + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u^{-\frac{1}{2}} du = dx \Rightarrow$

$u \neq 0 \quad \int u^{-\frac{1}{2}} du = \int dx \Rightarrow 2u^{\frac{1}{2}} = x + c \quad \Rightarrow u = \frac{1}{4}(x+c)^2$

$\Rightarrow y - x = \frac{1}{4}(x+c)^2 \qquad y = x + \frac{1}{4}(x+c)^2$, aber auch $u \equiv 0$, also $y = x$ ist eine Lösung

AWP.: $y(-1) = -1 + \frac{1}{4}(-1+c)^2 = 1 \Rightarrow (c-1)^2 = 8 \Rightarrow c = 1 + 2\sqrt{2}$

$y = x + \frac{1}{4}(x + 1 + 2\sqrt{2})^2$; $y(-0{,}8) = -0{,}8 + \frac{1}{4}(0{,}2 + 2\sqrt{2})^2 \approx 1{,}492842712$

dieser Wert ist auf 9 Nachkommastellen gerundet.

b) Näherungslösung nach Runge Kutta mit Schrittweite $h = 0{,}1$

1. Schritt

x	y	$f(x,y) = \sqrt{y-x} + 1$	$k = h\,f(x,y)$
$x_0 = -1$	$y_0 = 1$	2,41421356	$k_1 = 0{,}24142136$
$x_0 + \frac{h}{2} = -0{,}95$	$y_0 + \frac{k_1}{2} = 1{,}12071068$	2,43899641	$k_2 = 0{,}24389964$
$x_0 + \frac{h}{2} = -0{,}95$	$y_0 + \frac{k_2}{2} = 1{,}12194932$	2,43942692	$k_3 = 0{,}24394269$
$x_1 = x_0 + h = -0{,}9$	$y_0 + k_3 = 1{,}24394269$	2,46422035	$k_4 = 0{,}24642201$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx 1{,}24392135$

2. Schritt

x	y	$f(x,y)$	$k = h\,f(x,y)$
$x_1 = -0{,}9$	$y_1 = 1{,}24392135$	$2{,}46421356$	$0{,}24642136 = k_1$
$x_1 + \frac{h}{2} = -0{,}85$	$y_1 + \frac{k_1}{2} = 1{,}36713203$	$2{,}48900370$	$0{,}24890037 = k_2$
$x_1 + \frac{h}{2} = -0{,}85$	$y_1 + \frac{k_2}{2} = 1{,}36837134$	$2{,}48941987$	$0{,}24894199 = k_3$
$x_1 + h = -0{,}8$	$y_1 + k_3 = 1{,}49286334$	$2{,}51422037$	$0{,}25142204 = k_4$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \approx 1{,}49284270$

Abweichung vom „exakten" auf 9 Nachkommastellen gerundeten Wert: kleiner als $2 \cdot 10^{-8}$

Runge Kutta mit doppelter Schrittweite: $h = 0{,}2$

x	y	$f(x,y)$	$k = h\,f(x,y)$
$x_0 = -1$	$y_0 = 1$	$2{,}41421356$	$k_1 = 0{,}48284271$
$x_0 + \frac{h}{2} = -0{,}9$	$y_0 + \frac{k_1}{2} = 1{,}24142136$	$2{,}46335961$	$k_2 = 0{,}49267192$
$x_0 + \frac{h}{2} = -0{,}9$	$y_0 + \frac{k_2}{2} = 1{,}24633596$	$2{,}46503787$	$k_3 = 0{,}49300757$
$x_0 + h = -0{,}8$	$y_0 + k_3 = 1{,}49300757$	$2{,}51426800$	$k_4 = 0{,}50285360$

$\tilde{y}_1 = y(-0{,}8) = 1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1{,}49284255 \approx y(-0{,}8)$

$\Delta = \frac{1}{15}(y_2 - \tilde{y}_1) \leq 2 \cdot 10^{-8}$ heuristische Fehlerabschätzung gibt in diesem Falle eine „gute" Fehlertoleranz.