6. Übung Math. I für Chemiker

1) $A\vec{x} = \vec{0}$ nichttrivial lösbar $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1-\lambda \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \lor \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2 \Rightarrow$ LGS nichttrivial lösbar $\Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 1, 2\}$

2 a) $a_n = \frac{2n^2+n}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n^{-2}}{n^{-2}} = \frac{2+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}$, da der Nenner $\not\to 0$ geht

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n})} = 2$ wegen $\frac{1}{n} \to 0$

b) Es ist

$$a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \frac{\sqrt{n}(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$

c) wegen $a_n = \frac{(-3)^{n+1}+2^n}{2^n - 3^{n-1}} \cdot \frac{3^{-n}}{3^{-n}} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}}$

ist für $n = 2j$:

$a_{2j} = \frac{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2j}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2j} - \frac{1}{3}}$ für $n = 2j+1$ $a_{2j+1} = \frac{-3 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2j+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2j+1} - \frac{1}{3}}$

Da $0 < \frac{2}{3} < 1$ ist $\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^k \to 0$ für $k \to \infty$, so dass

$\lim\limits_{j\to\infty} a_{2j} = -9$ und $\lim\limits_{j\to\infty} a_{2j+1} = 9$ gilt

$\Rightarrow \{a_n\}$ ist nicht konvergent.

d) Da $\cos(6j \cdot 60°) = \cos(j \cdot 360°) = 1$ gilt

und $\cos((6j+1)60°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_{6j} = \frac{1-6j}{6j+1}$ ~~cos~~ und $a_{6j+1} = \frac{1-6j-1}{6j+2} \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} a_{6j} = -1$ und $\lim\limits_{j\to\infty} a_{6j+1} = \frac{1}{2}$

also existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nicht.

e) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+5}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+5}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n+5}\right)^n = \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}\right)^n \frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{1}{n}}$ für $n \geq 2$.

$\Rightarrow a_n = \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{5}{n})^n} \cdot \frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{1}{n}}$.

wegen $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{5}{n})^n = e^5$

und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1$, folgt aus den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{5}{n})^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{e^{-1}}{e^5} = e^{-6}$$

3) Mit $a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n+1)$, $a_1 = 5$

folgt $a_2 = a_{1+1} = \frac{2}{3}(a_1+1) = \frac{2}{3}\cdot 6 = 4$, $a_3 = \frac{2}{3}(a_2+1) = \frac{10}{3}$

$a_4 = \frac{2}{3}\left(\frac{10}{3}+1\right) = \frac{26}{9}$, also $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$.

Frage: Ist a_n streng monoton fallend, also $a_n > a_{n+1}$? Das ist genau dann der Fall, wenn $a_n - a_{n+1} > 0$ gilt.

$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{2}{3}(a_n+1) = \frac{1}{3}(a_n - 2)$ und dies ist nur > 0 wenn $a_n > 2$ gilt.

Dies wird nun induktiv nachgewiesen:

Es gilt $a_1 = 5 > 2$ (Ind. Anfang)

Sei nun für ein $n \geq 1$ $a_n > 2$, dann gilt

$a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n+1) > \frac{2}{3}(2+1) = 2$ ✓.

Also ist die Folge a_n monoton fallend und $2 < a_n \leq 5$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ex.

$\Rightarrow a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3}(a_n+1) = \frac{2}{3}(a+1)$

$\Rightarrow \Rightarrow \frac{1}{3}a = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2$.

4 a) $s = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2+2j}$, Partialsumme: $s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2+2j}$.

Mit $\frac{1}{j^2+2j} = \frac{1}{j(j+2)} = \frac{a}{j} + \frac{b}{j+2} \Rightarrow \frac{1}{j(j+2)} = \frac{(a+b)j+2a}{j(j+2)}$

$\Rightarrow (a+b)j + 2a = 1$ für $j = 1, 2, \ldots \Rightarrow a+b=0 \wedge 2a = 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, \; b = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{j^2+2j} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j} - \frac{1}{j+2}\right]$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j} - \frac{1}{j+2}\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right]$$

$$\Rightarrow s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right] = \frac{3}{4}$$

b) $s = \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-3k} = \sum_{k=2}^{\infty} (2^{-3})^k = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{1}{64} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{k-2}$ $\quad j = k-2$

$= \frac{1}{64} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k$ mit $q = \frac{1}{8}$ gilt $|q| < 1$,

Also ist (Geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$ für $|q|<1$)

$$s = \frac{1}{64} \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{64} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1}{56}$$