

Klausur in Mathematik für Chemiker am 28.03.2019

Name:

Vorname:

Matr.Nr.:

Teil I:

1. Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Ungleichungen

a) $\frac{x^2 + x}{x + 1} > x - 2$, [4]

b) $\left| \frac{1 - x}{x + 3} \right| < 1$. [4]

2. Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ t + 2 & 1 & t + 2 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R}$$

a) alle $t \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix eine Inverse A^{-1} besitzt, [4]

b) die Inverse A^{-1} für $t = 0$. [5]

3. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für welche

a) die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind. [4]

b) das von \vec{a} und \vec{c} aufgespannte Parallelogramm einen minimalen Betrag besitzt. [4]

4. Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sinh x}{1 - \cos x}$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\cosh x}$.

[5+4]

Teil II:

5. Berechnen Sie die Integrale

$$a) \int (x^2 - x) \ln x \, dx \quad b) \int_1^2 \frac{x+1}{x^3+x} \, dx$$

[4+5]

6. Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von f .

b) Berechnen Sie für den Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$ die Richtungsableitung von f in Richtung von $\vec{a} = (-2, 1)$.

c) Berechnen Sie die Extremwerte von f .

[2+3+3]

7. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

$$a) \quad xy' + 2y = x^3, \quad y(1) = 1, \quad [4]$$

$$b) \quad xy' - xy^2 - 2y^2 = 0, \quad y(1) = 1. \quad [4]$$

8. Berechnen Sie die allgemeine Lösung für

a) das homogene lineare Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

[5]

b) das inhomogene lineare Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 5y_2 + 1 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 - 2 \end{aligned}$$

[4]

[]: Maximal erreichbare Punktzahl.