Beispiele:

Integration rationaler Funktionen

1) $\int \frac{1}{x^3+4x^2+13x}\,dx = \int \frac{1}{x(x^2+4x+13)}\,dx = J$

Da $x^2+4x+13 = (x+2)^2+9$ ist liegen hier die einfachen Nullstellen $x_0 = 0$ und $x = -2 \pm 3i$ vor

Ansatz

$$\frac{1}{x(x^2+4x+13)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+4x+13} \Rightarrow a(x^2+4x+13) + bx^2 + cx = 1$$

$$\Rightarrow 1 = x^2\underset{\stackrel{!}{=}0}{(a+b)} + x\underset{\stackrel{!}{=}0}{(4a+c)} + \underset{\stackrel{!}{=}1}{13a} \Rightarrow a = \frac{1}{13},\ b = -\frac{1}{13},\ c = -\frac{4}{13}$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{13}\left(\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+4x+13}\,dx\right) \Rightarrow$$

$$J = \frac{1}{13}\ln|x| - \frac{1}{26}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+13} - \frac{2}{13}\underbrace{\int\frac{1}{(x+2)^2+9}\,dx}_{J_1}$$

$$= \frac{1}{26}\left(\ln(x^2) - \ln(x^2+4x+13)\right) - \frac{2}{13}J_1$$

J_1 wird nun auf den Arkus Tangens zurückgeführt indem man zunächst 9 aus dem Nenner ausklammert

$$J_1 = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\,\frac{1}{3}\,dx$$

und dann die Substitution $t = g(x) = \frac{x+2}{3}$ benutzt, dann ist $\frac{dt}{dx} = g'(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow dt = \frac{1}{3}dx$

Damit: $J_1 = \frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\arctan t + C \qquad t = \frac{x+2}{3}$

$$J_1 = \frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3} + C$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{26}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4x+13}\right) - \frac{2}{39}\arctan\frac{x+2}{3} + C$$

2. $J = \int \frac{x^2}{x^6+3x^3-4}\,dx$. Wenn man hier nach Vorschrift der Partialbruchzerlegung vorgeht, steht man vor einem großen Rechenaufwand. Da im Nenner nur Potenzen von x^3 vorkommen und im Zähler x^2 kann man die Rechnung vereinfachen! Mit Hilfe der Substitution $t = g(x) = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx$ und somit

$$J = \frac{1}{3}\int\frac{3x^2\,dx}{(x^3)^2+3x^3-4} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+3t-4} = \frac{1}{3}\int\frac{1}{(t-1)(t+4)}\,dt$$

$$= \frac{1}{15}\int\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+4}\right]dt = \frac{1}{15}\ln\left|\frac{t+1}{t+4}\right| + C = \frac{1}{15}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3+4}\right| + C$$

Beispiele zu Anwendungen:

1) Flächeninhalt und Rotationskörper-Volumen:

Fläche F durch $0 \le x \le \pi$, $\sin x \le y \le x(\pi - x)$

Inhalt: $F = \int_0^\pi (x(\pi-x) - \sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cos x \Big|_0^\pi$

$= \frac{\pi^3}{6} - 2$

Volumen des Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse

$V = \pi \int_0^\pi [x^2(\pi-x)^2 - \sin^2 x]\,dx$

$= \pi\left[\pi^2 \frac{x^3}{3} - \pi \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \Big|_0^\pi - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\,dx \right]$

$= \frac{\pi^6}{30} - \frac{\pi^2}{2}$

2 Bogenlänge

a) C: $0 \le x \le 2$ $f(x) = \cosh x$

$s = \int_0^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$ $f'(x) = \sinh x$

$s = \int_0^2 \sqrt{1 + \sinh^2 x}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\cosh^2 x}\,dx = \int_0^2 |\cosh x|\,dx$

$= \int_0^2 \cosh x\,dx = \sinh x \Big|_0^2 = \sinh 2.$

b) C: $0 \le x \le 2$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $f'(x) = x$

$s = \int_0^2 1 \cdot \sqrt{1 + x^2}\,dx =$

Part. Integr mit $u' = 1$ $v = \sqrt{1 + x^2}$

$u = x$ $v' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow s = \underbrace{x \cdot \sqrt{1+x^2}}_{u \cdot v} \Big|_0^2 - \int_0^2 \underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}_{u \cdot v'}\,dx$

$= 2\sqrt{5} - \int_0^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$\Rightarrow s = 2\sqrt{5} - \underbrace{\int \sqrt{x^2+1}\,dx}_{s} + \operatorname{arsinh} x \Big|_0^2$

$\Rightarrow s = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh} 2$

Beispiele zu uneigentlichen Integralen

1) $\int_{-2}^{3} \ln x^2 \, dx$ Hier ist die Funktion $\ln x^2$ bei $x=0$ nicht definiert und unbeschränkt

aber $\lim_{\varepsilon \to 0_+} \lim_{\eta \to 0_+} \left[\int_{-2}^{-\varepsilon} 1 \cdot \ln x^2 \, dx + \int_{\eta}^{3} 1 \cdot \ln x^2 \, dx \right]$

$= \lim_{\varepsilon \to 0_+} \left[x(\ln x^2 - 2) \right]_{-2}^{-\varepsilon} + \lim_{\eta \to 0_+} x(\ln x^2 - 2) \Big|_{\eta}^{3} = 2(\ln 4 - 2) + 3(\ln 4 - 2)$

existiert.

2) Integrale über rationale Funktionen, welche Polstellen im Integrationsintervall besitzen existieren nicht.

3) $\int_{1}^{+\infty} x^{\alpha} \, dx \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

wegen $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1, \quad \int x^{-1} = \ln x + c$

ist $\int_{1}^{b} x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} \left[b^{\alpha+1} - 1 \right], \quad \int_{1}^{b} x^{-1} = \ln b$

so dass $\lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} x^{\alpha} dx = \int_{1}^{+\infty} x^{\alpha} dx = -\frac{1}{\alpha+1}$

ist, wenn $\alpha < -1$ ist und für $\alpha \geq -1$ nicht existiert.

Ein sehr wichtiges uneigentliches Integral ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-x_0)^2} dx$$ mit dem wir uns später befassen werden.