Beispiele Dgln 1. Ordnung

1) $xyy' = x+2$ ist trennbar

$xy\frac{dy}{dx} = x+2 \Rightarrow y\,dy = (1+\frac{2}{x})\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int y\,dy = \int (1+\frac{2}{x})\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = x + \ln x^2 + c$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{2x + \ln x^4 + c}$, mit $2x + \ln x^4 + c > 0$

2. $xyy' = y^2 + x^2 \underset{y,x\neq 0}{\Rightarrow} y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = f(\frac{y}{x})$

Subst. $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = xu' + u$

$\Rightarrow xu' + u = u + \frac{1}{u} \Rightarrow xu' = \frac{1}{u}$ ist trennbar

$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \Rightarrow u\,du = \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + c \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = 2\ln|x| + c$

$|\frac{y}{x}| = \sqrt{2\ln|x| + c}$ $\quad y = \underset{(-)}{+}x\sqrt{\ln x^2 + c}$ $\quad \ln x^2 + c \geq 0.$

3.) $(1+x^2)y' + 2xy = x^2$ lineare 1 Ordnung

Normierung: $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow$

Lösungsformel:

$$y_A = e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int\frac{x^2}{x^2+1}e^{\int\frac{2x}{x^2+1}dx}dx + c\right]$$

$$\Rightarrow y_A = e^{-\ln(x^2+1)}\left[\int\frac{x^2}{x^2+1}e^{\ln(x^2+1)}dx + c\right]$$

$$\Rightarrow y_A = \frac{1}{x^2+1}\left[\int x^2\,dx + c\right] = \frac{1}{x^2+1}\left[\frac{1}{3}x^3 + c\right]$$

4) $y' = \frac{3x^2y^2+1}{1-2yx^3}$ (Exakte Dgl. ?)

$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y^2+1}{2x^3y-1} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

$\Rightarrow \underbrace{(3x^2y^2+1)}_{P}dx + \underbrace{(2x^3y-1)}_{Q}dy = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y \qquad \frac{\partial}{\partial x}Q = 6x^2y \Rightarrow$ Dgl. exakt.

$\Rightarrow$ Es existiert ein $f(x,y)$ mit

$\frac{\partial}{\partial x}f = P \wedge \frac{\partial}{\partial y}f = Q$ und $f(x,y) = c$ Löst die Dgl.

$\Rightarrow f(x,y) = \int P\,dx + \varphi(y) = \int (3x^2y^2+1)\,dx + \varphi(y)$

$\Rightarrow f(x,y) = x^3y^2 + x + \varphi(y)$. Best. von $\varphi(y)$

$\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y^2 + x + \varphi(y)\right) = 2x^3y + \varphi'(y) = Q(x,y)$

$\Rightarrow \varphi'(y) = -1 \Rightarrow \varphi(y) = -y$ (Die Integrationskonstante kann $=0$ gesetzt werden)

$\Rightarrow f(x,y) = x^3y^2 + x - y$ und $x^3y^2 + x - y = c$

sind die Lösungen der Dgl. in impliziter Form

Auflösung nach y: $\quad y^2 - \frac{1}{x^3}y + \frac{x-c}{x^3} = 0 \quad (x \neq 0)$

$\Rightarrow \left(y - \frac{1}{2x^3}\right)^2 + \frac{x-c}{x^3} - \frac{1}{4x^6} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2x^3} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{x-c}{x^3} - \frac{1}{4x^6}}_{\geq 0}}$

5) $\quad xy' = xy^2 + y^2 - x - 1$

Wegen $xy^2 + y^2 - x - 1 = (x+1)y^2 - (x+1) = (y^2-1)(x+1)$

ist die Dgl. $xy' = (x+1)(y^2-1)$ trennbar $(x \neq 0)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{f}\underbrace{(y^2-1)}_{g} \underset{y^2\neq 1}{\Rightarrow} \frac{dy}{y^2-1} = \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

$\underset{y\neq \pm 1}{\Rightarrow} \int \frac{dy}{y^2-1} = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ wegen

$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + \ln|x| + c_1$, $y \equiv \pm 1$ sind ebenfalls Lösungen

Auflösung nach y:

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2x + \ln x^2 + c_2$$

$\Rightarrow \frac{|y-1|}{|y+1|} = e^{2x + \ln x^2 + c_2} = x^2 e^{2x} \cdot \underbrace{e^{c_2}}_{>0}$

Auflösen des Betrages und weil $y \equiv \pm 1$ ebenfalls Lösungen sind $\Rightarrow$

$\frac{y-1}{y+1} = cx^2e^{2x} \quad , c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y - 1 = cx^2e^{2x}(y+1) \Rightarrow y = \frac{1 + cx^2e^{2x}}{1 - cx^2e^{2x}}$

6) Man löst das AWP

$$x y' + 2y = e^x, \qquad y(1) = 1$$

Bemerkung: Für das AWP $y' + a(x)y = s(x)$, $y(x_0) = y_0$, kann man die Lösungsformel anpassen durch $y = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\left[\int_{x_0}^{x} s(t)\, e^{\int_{x_0}^{t} a(\tau)d\tau} dt + y_0\right]$.

Normierung $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x}e^x \qquad y(1) = 1$

$$\Rightarrow y = e^{-\int_1^x \frac{2}{t}dt}\left[\int_1^x \frac{1}{t}e^t\, e^{\int_1^t \frac{2}{\tau}d\tau} dt + 1\right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x^2}\left[\int_1^x t e^t + 1\right] = \frac{1}{x^2}\left[(x-1)e^x + 1\right]$$

7. Man löst das AWP

$$y' = \sqrt{1+y^2}\,(2x+1), \qquad y(0) = 0$$

Dgl ist trennbar $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{1+y^2}\,(2x+1)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = (2x+1)dx \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int (2x+1)dx$$

$$\Rightarrow \operatorname{arsinh} y = x^2 + x + c \quad \Rightarrow y = \sinh(x^2 + x + c)$$

$$0 = y(0) = \sinh c \Rightarrow c = 0 \qquad y = \sinh(x^2 + x).$$

8) AWP $\quad y' = y^2 \sin(xy) \quad y(0) = 0$.

Da $f(x,y) = y^2 \sin(xy)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig und stetig partiell diffbar ist $\Rightarrow$ Das AWP hat genau eine Lösung.

Die Nullfunktion $y \equiv 0 \Rightarrow y' \equiv 0$ löst damit das Problem.

9. Das AWP $\quad y y' + x = 0 \quad y(0) = 0$

besitzt keine Lösung, denn es ist

$$y\frac{dy}{dx} = -x \quad \Rightarrow y\,dy = -x\,dx \quad \Rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c_1 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 = c \qquad \text{wegen } y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 0$ Besitzt in $\mathbb{R}^1$ keine Lösung $y(x)$