Funktionen mehrerer reeller Variabler.

Def.: Es sei $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f: M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, dann nennt man f eine reelle Funktion der n Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$,
$(x_1, \dots, x_n) \in M$ $\quad f: \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \to f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Bsp: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f: (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 x_2 - \sin(x_1 + x_2 \cdot x_3)$

Def.: $f: M \to \mathbb{R}$ wird stetig auf M genannt, wenn für jedes $\vec{x}_0 \in M$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ (das i.A. von x_0 und ε abhängig) existiert, mit

$$|f(\vec{x}_0) - f(\vec{x})| < \varepsilon \quad \text{für alle } \vec{x} \in M \text{ und } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$$

Def.: Sind $I_j \subset \mathbb{R}$ $j = 1, \dots, n$ Intervalle, so nennt man $R = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ ein (achsenparalleles) Rechteck. R nennt man offen, wenn alle Intervalle I_j offen sind und abegeschlossen, wenn alle I_j abgeschlossen sind.

Satz: Ist $R \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Rechteck $f: R \to \mathbb{R}$ stetig, dann besitzt f auf R sowohl ein Maximum $M = f(\vec{x}_1)$ als auch ein Minimum $m = f(\vec{x}_2)$, d.h. $m \leq f(\vec{x}) \leq M$ für alle $x \in R$. Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ mit $m \leq t \leq M$ existiert dann ein $\vec{x} \in R$ mit $f(\vec{x}) = t$.

Bemerkung: Ein Schaubild (Graph) der Funktion f ist natürlich formal definierbar durch
$G_f =: \{(\vec{x}, f(\vec{x})), \vec{x} \in M\}$, aber anschaulich nur im Fall $n = 2$ realisierbar. (siehe Skript Math. II S. 37)

Wichtig: Alle Funktionen $f(\vec{x})$, welche durch die elementaren Funktionen einer reellen Variablen gebildet werden, sind in ihrem Definitionsbereich stetig.

Ableitungen:

Es sei nun für $j = 1, \ldots, n$ $\vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$ der j-te Standardbasisvektor und $f: M \to \mathbb{R}$ und $\vec{x}_0 \in M$ (so dass ein $\varepsilon > 0$ ex. mit $\vec{x} \in M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon$.

Def.: Exist der Grenzwert $\lim_{h \to 0} (f(\vec{x}_0 + h\vec{e}_j) - f(\vec{x}_0))\frac{1}{h} = a_j$, so nennt man a_j die partielle Ableitung von f nach x_j und schreibt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x})_{(\vec{x} = \vec{x}_0)} = a_j = D_j f(\vec{x}_0) = f_{x_j}(\vec{x}_0).$$

Man nennt f auf M partiell nach x_j diffbar, wenn f in jedem Punkt von M partiell nach x_j diffbar ist, dann schreibt man

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}) = D_j f(\vec{x}) = f_{x_j}(\vec{x}) \qquad \vec{x} \in M$$

Aus der Definition der partiellen Ableitung folgt unmittelbar, dass man die partielle Ableitung nach x_j bilden kann, indem man in der Funktion f alle anderen Variablen x_k, $k \neq j$ fest läßt (also wie Konstanten behandelt) und wie gewohnt nach der einen Variablen x_j ableitet. Die Ableitungsregeln bleiben erhalten.

Beispiel: 1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = y x^3 e^{x+y+z}$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\vec{x}) = y e^{x+y+z}(3x^2 + x^3) \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{x}) = x^3 e^{x+y+z}(y+1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(\vec{x}) = y x^3 e^{x+y+z}.$$

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Dann gilt (siehe Skript Math. II S. 39)

f ist auf $\mathbb{R}^2$ partiell nach x und y diffbar aber f ist bei $(0,0)$ unstetig, da mit $y = ax$

$$\lim_{x \to 0} f(x, ax) = \lim_{x \to 0} \frac{a x^2}{x^2 + a^2 x^2} = \frac{a}{1+a^2} \neq 0 \quad \text{für } a \neq 0$$

gilt.

Dieser Mangel wird behoben, wenn man fordert, dass die partiellen Ableitungen von f stetig sind.

Def: Man nennt f auf M stetig partiell diffbar, wenn f nach allen Variablen diffbar ist und alle diese Ableitungen stetig auf M sind.

Dann gilt:

Satz: Ist f auf M stetig partiell diffbar $\vec{x}_0 \in M$, dann ist

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + f_{x_1}(\vec{x}_0)(x_1 - x_{01}) + \cdots + f_{x_n}(\vec{x}_0)(x_n - x_{0n}) + r(\vec{x}, \vec{x}_0)$$

mit $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{r(\vec{x}, \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$

Def: Gradient von f: man nennt

$$\operatorname{Grad} f(\vec{x}) := \nabla f(\vec{x}) = (f_{x_1}(\vec{x}), \ldots, f_{x_n}(\vec{x}))$$

den Gradienten von f an der Stelle $\vec{x}$.

Damit hat man

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \operatorname{Grad} f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + r(\vec{x}, \vec{x}_0)$$

wenn f stetig diffbar auf M ist.

und schreibt dann auch

$$\Delta f(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \operatorname{Grad} f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + r(\vec{x}, \vec{x}_0)$$

Für kleine $\Delta_j = x - x_j$.

$$\Delta f(\vec{x}) = \operatorname{Grad} f(\vec{x}_0)(\Delta x_1, \ldots, \Delta_n) + r(\vec{x}, \vec{x}_0)$$

Die (Hyper-) Ebene

$$z - f(\vec{x}_0) - \operatorname{Grad} f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \quad \text{in}$$

$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $(\vec{x}, z) \in M \times \mathbb{R}$ nennt man dann die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$.

Ist f auf M stetig diffbar, so ist f auch stetig auf M.

Außerdem kann man dann f in jedem Punkt $\vec{x} \in M$ nach jeder beliebigen Richtung ableiten; d.h. ist $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(\vec{x}+h\vec{a}) - f(\vec{x})\right) = \operatorname{Grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{a}$$

Man schreibt dann $\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(\vec{x}) = \operatorname{Grad} f(\vec{x})\, \vec{a}$

und nennt dann $\frac{\partial}{\partial \vec{a}} f(\vec{x})$ die Richtungsableitung von f nach $\vec{a}$.

Es sei nun $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ und $M \subset \mathbb{R}^n$

$\vec{x} : I \to M$. $\vec{x} ; t \to (x_1(t), \ldots, x_n(t))$

wobei alle $x_j(t)$ stetig diffbar auf I sind und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig diffbar.

Satz:
Dann ist die Funktion $F(t) = f(\vec{x}(t))$ auf I stetig diffbar und es ist

$F'(t) = \operatorname{grad} f(\vec{x}(t)) \cdot (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$. (Kettenregel)

Def.: Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ $M \subset \mathbb{R}^n$. Existiert $c \in \mathbb{R}$ so dass die Punktmenge $N_c = \{\vec{x} \in M \mid f(\vec{x}) = c\} \neq \emptyset$ ist, so nennt N_c eine Niveau-(Hyper)Fläche von f auf M

Ist f auf M stetig diffbar und N_c eine Niveau-Fläche von f, dann folgt

Satz: Gilt $\vec{x} : I \to N_c$ $\vec{x} : t \to x(t) \in N_c$ und ist $\vec{x}(t)$ stetig diffbar, dann gilt

$\operatorname{grad} f(x(t)) \cdot \vec{x}'(t) = 0$, $\vec{x}'(t) := (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$

$\Rightarrow$ $\operatorname{grad} f \perp$ Niveaufläche.

Das folgt sofort aus der Kettenregel
$c = F(t) = f(\vec{x}(t))$ nach t differenziert
$= 0 = \operatorname{grad} f(x(t))\vec{x}\,'(t)$.

Höhere Ableitungen.

Ist wieder $f: M \to \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar und sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x})$ ebenfalls stetig partiell diffbar so schreibt man $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x})\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} f(\vec{x})$ oder auch $D_{kj} f(\vec{x})$ oder $f_{x_k x_j}(\vec{x})$.

Satz von Schwarz:
Ist $f: M \to \mathbb{R}$ stetig diffbar und existiern $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} f(\vec{x})$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(\vec{x})$ und sind diese stetig auf $M \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} f(\vec{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} f(\vec{x})$.
d.h. die Reihenfolge der Ableitungen ist vertauschbar.

Def.: Hesse-Matrix

$f: M \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig part. Diffbar

$$H(\vec{x}) := \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k}\right)_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,n}}$$

$H(x)$ ist nach Schwarz also eine symmetrische Matrix.

Es gilt der
Satz: Ist $f: M \to \mathbb{R}$ 2 mal stetig partiell diffbar und $x_0 \in M$, so gilt für alle $\vec{x} \in M$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)\, H(\vec{x}_0)\,(\vec{x} - \vec{x}_0)^T + u(\vec{x}, \vec{x}_0)$$

mit $\lim_{\vec{x} \to x_0} \frac{u(\vec{x}, x_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2} = 0$