Klausur in Mathematik für Chemiker am 18.07.2019

Name: Vorname: Matr.Nr.:

Teil I:

1. Berechnen Sie alle Lösungen der komplexen Gleichungen

a) $|z-i| = Re(1-iz)$, **[4]**

b) $z = 2i - \frac{3}{z}$ **[4]**

in kartesischer Form.

2. Berechnen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} tx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & tx_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & tx_2 & - & (t+1)x_3 & = & 1 \end{array} \quad , \quad t \in R$$

a) alle $t \in R$, für welche es genau eine Lösung besitzt, **[4]**

b) für $t = 2$ die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel. **[5]**

3. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle $t \in R$, für welche die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig sind. **[4]**

b) Zeigen Sie, dass für den Winkel α zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\cos\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

. **[4]**

4. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\ln(1-x^2)} \quad , \quad b) \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\sinh x} \; .$$

[5+4]

Teil II:

5. Berechnen Sie die Integrale

$$a) \quad \int (2x-1)e^{-2x}\ dx \qquad b) \quad \int_0^1 \frac{x+1}{x^3+x^2+x+1}\ dx$$

[4+5]

6. Gegeben ist die Funktion

$$f : R^2 \to R \quad , \quad f : (x,y) \to x^2 - xy + y^2 - x + y.$$

a) Berechnen Sie für den Punkt $(x_0, y_0) = (2, -1)$ die Richtungsableitung von f in Richtung von $\vec{a} = (-3, 4)$.
b) Berechnen Sie die Extremwerte von f .

[3+5]

7. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

a) $xy' - 2y = x^3 e^x \quad , \quad y(1) = 0 \quad ,$ **[4]**

b) $(x+2)y' = xy^2 + x \quad , \quad y(-1) = 0$. **[4]**

8. Berechnen Sie die allgemeine Lösung für

a) das homogene lineare Differenzialgleichungssystem

$$y_1' = y_1 + 2y_2$$
$$y_2' = 3y_1 + 2y_2$$

[5]

b) das inhomogene lineare Differenzialgleichungssystem

$$y_1' = y_1 + 2y_2 + e^{2x}$$
$$y_2' = 3y_1 + 2y_2 - e^{2x}$$

[4]

[ ]: Maximal erreichbare Punktzahl.