# Komplexe Zahlen (und Funktionen) II. Teil.

Im Kapitel Potenzreihen Math. I haben wir schon die Reihe der natürlichen Exponentialfuktion in $\mathbb{C}$ fortgesetzt:

$e^z := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$ und daraus $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

erhalten, sowie $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos x + i\sin y)$

Wegen $|\cos x + i\sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$ ist damit

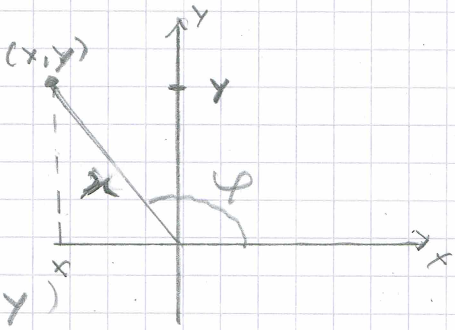
$|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x$

## (Ebene) Polarkoordinaten:

Im $\mathbb{R}^2$ ist es manchmal nützlich, die kartesischen Koordinaten $(x,y)$ in sogenannte Polarkoordinaten umzuwandeln.

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$




$\Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$

Für $x = 0$, $y \neq 0$ ist $\varphi = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sign} y)$

(0,0)

$\Rightarrow (x \neq 0) \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$ wenn $x > 0$

$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + \pi$ " $x < 0$

Damit wird dann $z = x + iy = r\cos\varphi + i r\sin\varphi$

und wegen $r = |z| \Rightarrow z = |z|e^{i\varphi}$ wobei hier

$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{3}{2}\pi$ zu wählen wäre.

Da aber $e^{i\varphi}$ $2\pi$-periodisch ist kann man ebenso $0 \leq \varphi < 2\pi$ wählen. (oder $200\pi \leq \varphi \leq 201\pi$)

So ist $1 + i = |1+i| \cdot e^{i\arctan 1} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

und damit $(1+i)^{80} = (\sqrt{2})^{80} e^{i20\pi} = 2^{40}(\underbrace{\cos(20\pi)}_{1} + i\underbrace{\sin(20\pi)}_{0})$
$= 2^{40}$

(einfacher $(1+i)^{80} = ((1+i)^2)^{40} = (2i)^{40} = 2^{40} \cdot (i)^{40} = 2^{40}$)

$z = re^{i\varphi}$ nennt man die Eulersche Darstellung von $z$ (bzw. Polare Darstellung von $z$).

Eine Anwendung: komplexe $n$-te Wurzel, $n \in \mathbb{N}$

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\alpha = a + ib = |\alpha| e^{i\phi}$, dann ist auch $\alpha = |\alpha| e^{i(\phi + 2\pi k)}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

Alle $z = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, mit $z^n = \alpha$, werden $n$-te Wurzeln von $\alpha$ genannt.

wegen $z^n = r^n e^{in\varphi} = |\alpha| e^{i(\phi + 2k\pi)} \Leftrightarrow$

$r = \sqrt[n]{|\alpha|} \wedge \varphi = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ gilt. Da $\frac{k}{n}$ für beliebige $k \in \mathbb{N}_0$ nur $0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ hat.

$\Rightarrow$ $\alpha$ besitzt genau die $n$ $n$-ten Wurzeln

$$z_k = \sqrt[n]{|\alpha|}\, e^{i\frac{\phi}{n}} \cdot e^{i \cdot \frac{2k}{n}\pi} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$\omega_{n,k} = e^{i 2\pi \frac{k}{n}}$ $k = 0, \dots, n-1$ nennt man die primitiven Einheitswurzeln.

Komplex Funktionen: (Kurz einführung)

Die elementaren Funktionen in $\mathbb{R}$ lassen sich direkt über ihre Taylorreihen ins Komplexe fortsetzen.

Bsp.: $\cosh x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!}$ Konvergiert für $x \in \mathbb{R}$

$\cosh z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!}$ " " $z \in \mathbb{C}$

Ebenso kann man die Ableitung einer Funktion im komplexen analog zum reellen definieren.

Es sei $z_0$ ein innerer Punkt von $M$, d.h. zu $z_0$ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass alle $z \in \mathbb{C}$, mit $|z - z_0| < \varepsilon$ ebenfalls zu $M$ gehören.

Def.: $f'(z_0) := \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, wenn der Grenzwert existiert.

Die Ableitungen der elementaren Funktionen in $\mathbb{C}$ sind damit auch identisch mit denen in $\mathbb{R}$, wenn man sie auf $\mathbb{R}$ einschränkt.

d.h $\frac{d}{dz} e^z = e^z$ $\frac{\partial}{\partial z} \sin z = \cos z$ ... usw.

(Im übrigen ist eine komplexe Funktion $f$, $f: G \to \mathbb{C}$, wenn sie auf einem Gebiet (so nennt man eine offene zusammenhängende Menge in $\mathbb{C}$) einmal diffbar ist, so ist sie dort auch beliebig oft diffbar und ist in jedem Punkt in $G$ in eine Reihe entwickelbar; man nennt sie dann „holomorph" auf $G$).

Ebenso gelten auch die aus dem reellen bekannten Ableitungsregeln.