Zusammenfassung Lineare Dgln n-ter Ordnung

Es seien $a_0, \dots, a_{n-1}; s: I = (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, $a_n = 1$

$$L(y) := \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, y^{(j)}$$

Dann mein $L(y) = \sum_{j=1}^{n} a_j\, y^{(j)} = s(x)$ eine normierte Lineare Dgl. n-ter Ordnung.

Man nemt sie homogen, wenn $s(x) \equiv 0$ ist, sonst inhomogen.

Superpositionsprinzip:

Ist y_A die allgemeine und y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. $L(y) = s(x)$ und y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. $L(y) = 0$, dann gilt:

$$y_A = y_h + y_p$$

Man löst also eine inhomogene Dgl. indem man erst die Lösungen der zugehörigen homogenen Dgl. bestimmt, dann eine spezielle Lösung y_p der inhomogenen Dgl. und diese addiert.

Existenz und Eindeutigskeitsatz:

Es seien $a_0, \dots, a_n; s: I = (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig mit $a_n = 1$; $x_0 \in I$ und $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{R}$, dann besitzt die homogene Dgl.

$$L(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, y^{(j)} = 0 \quad \text{auf dem Intervall } I$$

n linear unabhängige Lösungen $y_1, \dots, y_n$ und $y_h = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j$ $((c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n)$ ist die allgemeine Lösung von $L(y) = 0$. $y_1, \dots, y_n$: Fundamentalsystem.

Außer dem gibt es genau eine Lösung y, mit $y^{(j)}(x_0) = p_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Lösung der Inhomogenen Dgl. durch Variation der Konstanten. Dies setzt voraus, dass man die zugehörige homogene Dgl. gelöst hat.

Sei $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = s(x)$

und $y_1, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Dgl. $L(y) = 0$, dann ist

$y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ die allgemein Lösung der homog. Dgl.

Man macht dann zur Ermittlung einer partikulären Lösung den Ansatz:

$y_p = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2 + \dots + c_n(x)\, y_n$ mit unbestimmten Funktionen die auf I diffbar sind.

Dann benötigt man die Wronski-Determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

, bildet dann die Determinanten $W_k(x)$, indem man in der Wronskideterminante die k-te Spalte durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s(x) \end{pmatrix}$$

ersetzt und erhält dann für die zu bestimmenden $c_k(x)$: $c_k'(x) = \dfrac{W_k(x)}{W(x)}$ $k = 1, \dots, n$

bestimmt zu jeden $c_k'(x)$ eine Stammfunktion $c_k(x)$ und erhält damit $y_p = c_1(x)\, y_1 + \dots + c_n(x)\, y_n$

$y_A = y_h + y_p$

Homogene lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten:

Es seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $a_n \neq 0$

Dann nennt man

$$L(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = 0$$ eine homogene lineare Dgl.

mit konstanten Koeffizienten.

Zur Lösung macht man den Ansatz:

$y = y(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$ und setzt dies in $L(y)$ ein

$$\Rightarrow L(e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j\Big)$$

$$= e^{\lambda x} \cdot P(\lambda) = 0 \quad , \quad P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$$

Man nennt P das charakteristische Polynom der Dgl.

Aus der Gleichung $L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \cdot P(\lambda) = 0$

folgt, dass $y = e^{\lambda_0 x}$ genau dann eine Lösung der homogenen Dgl. ist, wenn λ_0 eine Nullstelle von $P(\lambda)$ ist.

Da $a_n \neq 0$ vorausgesetzt ist, hat P in $\mathbb{C}$ genau n - Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, von denen einige mehrfach sein können.

Man erhält aber folgendermaßen n linear unabhängige Lösung der Dgl.:

Zu reellen j-fachen Nullstellen λ_1 von P sind

$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = x e^{\lambda_1 x}, \dots, y_j = x^{j-1} e^{\lambda_1 x}$ genau j Lösungen.

Zu einem Paar konjugiert komplexen Nullstellen

$\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ erhält man die Lösungen

$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ (bei einfachen Nullst.)

$y_{11} = e^{\alpha x}\cos(\beta x), y_{21} = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$, $y_{12} = x\, y_{11}$, $y_{2,2} = x\, y_{1,2}, \dots$

$\dots y_{1,j} = x^{j-1} y_{11}$, $y_{2,j} = x^{j-1} y_{21}$.

Damit erhält man genau n linear unabhängige Lösungen $y_1, \ldots, y_n$, also ein Fundamentalsystem

$$y_h = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \qquad (c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}).$$

Beispiele: zu lösen

1) $y''' + y'' - 2y = 0$ Ansatz $y = e^{\lambda x} \Rightarrow y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^3 e^{\lambda x} + \lambda^2 e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^3 + \lambda^2 - 2) = 0$

char. Polynom $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$

	1	1	0	-2
1		1	2	2
	1	2	2	0

$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm i$

$\Rightarrow$ Da $\lambda_1 = 1$ eine einfache reelle Nst, $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$

Da $\lambda = -1 \pm i$ ein Paar einfacher kompl. Nullst.

$\Rightarrow y_2 = e^{-x} \cdot \cos x$, $y_3 = e^{-x} \sin 3x$

y_1, y_2, y_3 Fundamentalsystem

$$y_h = c_1 e^x + e^{-x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x).$$

2) $y''' + 7y'' + 16y' + 12y = 0$; Ansatz $y = e^{\lambda x} \Rightarrow (y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x})$

$e^{\lambda x}(\lambda^3 + 7\lambda^2 + 18\lambda + 12) = 0 \Rightarrow$ char. Gleichung

$P(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 = 0$ Da alle Koeffizienten > 0

$\Rightarrow$ P hat nur negative reelle Nullst. und ganzzahlige müssen 12 teilen. -1 ist keine Nst.

-2:

	1	7	16	12
-2		-2	-10	-12
	1	5	6	0

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1 = -2$, $\lambda_3 = -3$

$\Rightarrow$ Da $\lambda_1 = -2$ eine 2-fache Nst $\Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x} \wedge y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ sind Lösungen, und $y_3 = e^{\lambda_3 x}$ (einf. N.S.)

$\Rightarrow y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = x e^{-2x}$, $y_3 = e^{-3x}$ bilden ein Fundamentalsystem

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 e^{-3x}.$$