Eulersche Differenzialgleichung:

Def.: Dgln der Form

$$L(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{(j)} = s(x), \text{ mit } a_j \in \mathbb{R} \quad s: I \to \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}_+$$

nennt man Eulersche Dgln.

Durch die Substitution $u(t) = y(e^t)$, d.h. $x = e^t$ wird die Euler-Dgl. in eine Lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten überführt.

Das wird induktiv gezeigt.

Mit $u(t) = y(e^t)$ $x = e^t \Rightarrow$ (1) $u'(t) = e^t y'(e^t) = x y'(x)$

$(\Rightarrow x y' \to u')$

Differenziert man weiter $\Rightarrow$

(2) $u''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t)$ $(x = e^t) \Rightarrow$

$u''(t) = u'(t) + x^2 y''(x) \Rightarrow x^2 y''(x) = u''(t) - u'(t)$

(2) nochmals diff.

$\Rightarrow u'''(t) = e^t y'(t) + (e^t)^2 y''(e^t) + 2(e^t)^2 y''(t) + (e^t)^3 y'''(e^t)$

$u'''(t) = u'(t) + 3\underbrace{(e^t)^2 y''(e^t)} + (e^t)^3 y'''(e^t)$

$u'''(t) = u'(t) + 3(u''(t) - u'(t)) + x^3 y'''(x)$

$\Rightarrow x^3 y'''(x) = u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t)$

wir wollen hier nur bis $n = 3$ gehen

Man kann also die Euler-Dgl. lösen indem man sie zunächst in eine Linear mit konstanten Koeffizienten transformiert, diese Dgl löst und dann $y(x) = u(\ln x)$ rücksubstituiert.

Es ist aber einfacher die von den linearen Dgln. mit konstanten Koeffizienten bekannten Ansätze durch die Substitution $t = \ln x$ in Ansätze für die Euler-Dgl. zu übertragen, was hier nur für die homogene Euler Dgl. vorgeführt wird.

Der Ansatz $u = e^{\lambda t}$ für die transformierte Dgl. mit konstanten Koeffizienten, wird mit

$$y(e^t) = u(t) = e^{\lambda t} \quad (t = \ln x) \quad \text{zu} \quad y(x) = e^{\lambda(\ln x)} \Rightarrow$$

$$y = x^\lambda \Rightarrow xy' = x\lambda x^{\lambda-1} = \lambda x^\lambda,$$

$$x^2 y'' = x^2 \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} = \lambda(\lambda-1)x^\lambda$$

$$\vdots$$

$$x^k y^{(k)} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)x^\lambda$$

Setzt man dies in die homogene Euler-Dgl.

$$L(y) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j y^{(j)} = 0 \qquad a_m \neq 0$$

ein, so folgt

$$\left(a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-j+1)\right) x^\lambda = 0 \quad , \text{ so dass}$$

man mit den Nullstellen λ_k des Charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda) = a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-j+1)$$

durch $y = x^{\lambda_k}$ wieder ein Fundamentalsystem erhält, wobei gilt

Ist λ_1 eine j-fache reelle Nullstelle

$\Rightarrow \quad y_1 = x^{\lambda_1}, \; y_2 = x^{\lambda_1}\ln x, \ldots, x^{\lambda_1}\ln^{j-1} x$ sind Lösungen

Ist $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ eine komplexe Nullst. auch $\bar{\lambda}_2 = \alpha - i\beta$

$\Rightarrow$ Lösungen $y_1 = x^\alpha \cos(\beta \ln x), \; y_2 = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$ sind Lösungen und ist die Nullstelle $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ k-fach $k \geq 1$, so auch $\bar{\lambda}_2 = \alpha - i\beta$ $\Rightarrow$ Lösungen:

$y_1 = x^{\alpha}\cos(\beta \ln x)$, $y = y_1 \cdot \ln x$, ..., $y = y_1 \cdot (\ln x)^{k-1}$

$y_2 = x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)$, $y = y_2 \cdot \ln x$, ..., $y = y_2 (\ln x)^{k-1}$

sind die zugehörigen Lösungen.

Beispiele:

1) $x^2 y'' - x y' + 3y = 0$, $x > 0$

a) Lösen durch Transformation $x = e^t$ $u(t) = y(e^t)$

$\Rightarrow$ $x^2 y'' \to u'' - u'$ $\quad xy' \to u'$ $\quad y \to u$

$\Rightarrow$ $u'' - u' - u' - 3u = 0$ $\Rightarrow$ $u'' - 2u' - 3u = 0$

Ansatz $u = e^{\lambda t}$ $\Rightarrow$ char. Gl. $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ $\Rightarrow$ $u_1(t) = e^{-t}$, $u_2(t) = e^{-3t}$

bilden ein Fundamentalsystem.

$\Rightarrow$ allg. Lösung

$u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$, Rücksubstitution

$\Rightarrow$ $y(x) = u(\ln x) = c_1 e^{-\ln x} + c_2 e^{-3\ln x} = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{x^3}$

b) Lösen durch Ansatz $y = x^{\lambda}$ $\Rightarrow$ $xy' = \lambda x^{\lambda}$

$x^2 y'' = \lambda(\lambda - 1) x^{\lambda}$ $\Rightarrow$

$\lambda(\lambda-1)x^{\lambda} - \lambda x^{\lambda} - 3x^{\lambda} = x^{\lambda}(\lambda(\lambda-1) - \lambda - 3) = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$

$\Rightarrow$ $y_1 = x^{-1}$, $y_2 = x^{-3}$ Fundamentalsystem

$\Rightarrow$ $y = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{x^3}$

Bemerkung: Je höher die Ordnung der Dgl. ist, desto aufwändiger wird die Rechnung, wenn man den Weg der Substitution geht, während der Ansatz $y = x^{\lambda}$ wesentlich schneller zum Ziel führt.

2. Bspl;

$x^3 y''' + 2x^2 y'' + x y' - y = 0$ Euler 3-ten Grades

Ansatz $y = x^\lambda \Rightarrow x y' = \lambda x^\lambda$, $x^2 y'' = \lambda(\lambda-1) x^\lambda$

$x^3 y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) x^\lambda$

$\Rightarrow x^\lambda (\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 2\lambda(\lambda-1) + \lambda - 1) = 0$

$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$

	1	-1	1	-1
1		1	0	0
	1	0	1	

$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \pm i$

$\Rightarrow y_1 = x^1$, $y_2 = x^0 \cdot \cos(1 \ln x)$ $y_2 = x^0 \sin(\ln x)$

$\Rightarrow y_h = c_1 x + c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x)$.

Die Substitutionsmethode wäre wesentlich aufwändiger.

Anfangswertprobleme und Randwertprobleme

Es sei wieder

$$L(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = s \qquad a_n = 1,\ a_0, \dots, a_{n-1}, s : I \to \mathbb{R}$$
$$I = [a,b],\ \text{bzw. } I = [a, +\infty)$$

und a_j, s $j = 0, \dots, n-1$ seien stetig.

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$L(y) = s$, $y(x_0) = p_0, y'(x_0) = p_1, \dots, y^{(n-1)} = p_{n-1}$ für jedes $x_0 \in I$ und $(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung.

Die allgemeine Lösung $y_A = y_h + y_p$ ist von den Parametern $c_1, \dots, c_n$ ($y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$) abhängig, die durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt werden.

Komplizierter sind i. A. sogenannte Randwertprobleme, bei denen man von Lösung der Dgl. $L(y) = s(x)$ auf einem Intervall $I = [a,b]$ verlangt, dass diese sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = b$ ein bestimmtes Verhalten haben sollen.

Dann spricht man von einem Randwertproblem.

Beispiele: siehe Skript Math. II

Seite 105 - 106 - 107

Beispiele zu Anfangswert und Randwertproblemen

1) Zu lösen das AWP

$y''' + 7y'' + 16y' + 12y = e^{-x}$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$

Bestimmung von y_p: $s(x) = e^{-x}$ $\to$ keine Nst. der char. Gl.: Ansatz $y_p = \alpha e^{-x}$, $y_p' = -\alpha e^{-x} = y_p'''$

$y'' = \alpha e^{-x}$

$\Rightarrow \alpha e^{-x}[-1 + 7 - 16 + 12] = e^{-x} \Rightarrow 2\alpha = 1 \quad \alpha = \frac{1}{2}$

$y_p = \frac{1}{2} e^{-x}$

$y_A = y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + c_3 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-x}$

$y(0) = c_1 + c_3 + \frac{1}{2} = 1$

$y_A' = (c_2 - 2c_1 - 2c_2 x)e^{-2x} - 3c_3 e^{-3x} - \frac{1}{2} e^{-x}$

$y'(0) = c_2 - 2c_1 - 3c_3 - \frac{1}{2} = 0$

$y_A'' = (4c_1 - 4c_2 + 4c_2 x)e^{-2x} + 9c_3 e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-x}$

$y''(0) = 4c_1 - 4c_2 + 9c_3 + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow$ LGS:

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\quad + c_3 &= \tfrac{1}{2} \\ -2c_1 + c_2 - 3c_3 &= \tfrac{1}{2} \\ 4c_1 - 4c_2 + 9c_3 &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow c_1 = \frac{13}{19},\ c_2 = \frac{46}{19}\quad c_3 = -\frac{7}{38}$$

$\Rightarrow$ Lösung $y = \frac{1}{19}(13 + 46x)e^{-2x} - \frac{7}{19} e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-x}$

2. Man löse das Randwertproblem

$y'' + 4y = \sin 3x \qquad y(0) = y(2\pi) = 0$

homogene Dgl.: $y'' + 4y = 0$, Ansatz $y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow$ char. Gl. $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow$

$y_1 = e^{0x}\cos(2x)$, $y_2 = e^{0x}\sin 2x \qquad y_1 = \cos(2x)$, y_2 $\sin(2x)$

$y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$

Inh. Dgl.: Da $3i$ keine Nullstelle der char. Gl.

$y_p = \alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)$, wobei man, da nur gerade Ableitungen von y auftreten

$y_p = \beta \sin(3x)$ ansetzen kann $\Rightarrow y_p'' = -9\beta \sin(3x)$

$\Rightarrow [-9+4]\beta \sin(3x) = \sin(3x) \Rightarrow -5\beta = 1$

$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{5}\sin(3x)$

$y = y_h + y_p = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - \frac{1}{5}\sin(3x)$

$y(0) = c_1 = 0 \quad \Rightarrow y = c_2 \sin(2x) - \frac{1}{5}\sin(3x)$

Erfüllt für alle $c_2 \in \mathbb{R}$ die Bedingung $y(2\pi) = 0$.