Lösung des inhomogenen Systems durch Ansatz für $\vec{y}_p$ bei speziellem $\vec{b}$.

Analog zur Lin. Dgl. n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, kann man auch bei LDS mit konstanten Koeffizienten bei speziellem $\vec{b}$ eine Partikuläre Lösung $\vec{y}_p$ durch einen angepassten Lösungsansatz bestimmen.

Wir wollen hier nur den Fall

$$\vec{y}\,' = A\vec{y} + \vec{b} \quad , \vec{b} = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} e^{ax} \qquad a \in \mathbb{C}$$

$p_1, \dots, p_n$ Polynome vom Grad $\leq k$ wobei für mindestens ein p_j ~~grad~~ $p_j = k$ ist, a **kein** Eigenwert von A.

Dann setzt man $\vec{y}_p = \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} e^{ax}$ mit unbestimmten Polynomen $q_1, \dots, q_n$ vom Grad k an, setzt $\vec{y}_p$ in $\vec{y}_p\,' = A\vec{y}_p + \vec{b}$ und bestimmt durch Koeffizientenvergleich die Koeffizienten von $q_1, \dots, q_n$.

Beispiel:

1) $y_1' = 3y_1 + 2y_2 + x$

$\quad y_2' = -2y_1 + 3y_2 + 1 \qquad \Rightarrow \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

I Homogenes LDS $\quad \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} \quad , \vec{y} = \vec{a} e^{\lambda x}$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 3 + 2i \Rightarrow \begin{array}{cc|c} -2i & 2 & 0 \\ i\cdot(-2 & -2i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow a_2 - i a_1 = 0 \quad \vec{a} = t\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(3+2i)x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{3x}(\cos(2x) + i\sin(2x))$

ist eine komplexe Lösung und

$\vec{y}_1 = \operatorname{Re} \vec{Y}_1 = e^{3x}\begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\sin(2x) \end{pmatrix} \quad , \vec{y}_2 = \operatorname{Im} \vec{Y}_1 = e^{3x}\begin{pmatrix} \sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}$

bilden ein reelles Fundamentalsystem.

$\Rightarrow \vec{y}_h = e^{3x}\begin{pmatrix} c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) \\ -c_1\sin(2x) + c_2\cos(2x)\end{pmatrix} = c_1\vec{y}_1 + c_2\vec{y}_2$

Lösung der inhomogenen Dgl.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 1\end{pmatrix}$, 0 kein Eigenwert von $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Ansatz $\vec{y}_p = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta \\ \gamma x + \delta\end{pmatrix}$, $\vec{y}_p' = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha x + \beta \\ \gamma x + \delta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3\alpha + 2\gamma)x + 3\beta + 2\delta + x - \alpha \\ (-2\alpha + 3\gamma)x - 2\beta + 3\delta + 1 - \gamma\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (I) $\begin{matrix} 3\alpha + 2\gamma = -1 \\ -2\alpha + 3\gamma = 0\end{matrix} \wedge \begin{matrix} 3\beta + 2\delta - \alpha = 0 \\ -2\beta + 3\delta - \gamma + 1 = 0\end{matrix}$ (II)

(I) $\Rightarrow \alpha = -\frac{3}{13}$, $\gamma = -\frac{2}{13}$ in II eingesetzt.

$\begin{matrix} 3\beta + 2\delta = -\frac{3}{13} \\ -2\beta + 3\delta = -\frac{15}{13}\end{matrix} \Rightarrow \delta = -\frac{45}{169}$, $\beta = \frac{60}{169}$

$\Rightarrow \vec{y}_p = -\frac{3}{13}x\begin{pmatrix} 1 \\ 5\end{pmatrix} + \frac{15}{169}\begin{pmatrix} 4 \\ -3\end{pmatrix}$

$\vec{y}_A = \vec{y}_h + \vec{y}_p$.

2.

$\begin{matrix} y_1' = 2y_1 + 2y_2 + e^{-x} \\ y_2' = y_1 + 3y_2\end{matrix}$ $\quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3\end{pmatrix}\vec{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}e^{-x}$

Lösung der hom. Dgl. Ansatz: $\vec{y} = \vec{a}\,e^{\lambda x}$

Eigenwerte $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$

Eigenvektoren $(A - \lambda_i E)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1$: $\begin{matrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & | & 0\end{matrix}$ $\quad a_2 = t \Rightarrow a_1 = -2t \quad \vec{a}_1 = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 4$ $\quad \begin{matrix} -2 & 2 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0\end{matrix} \Rightarrow \vec{a} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}$

$y_h = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1\end{pmatrix}e^{x} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}e^{4x}$

Inhom. Dgl. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}e^{-x}$ (-1) kein Eigenwert

$\Rightarrow \vec{y}_p = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}e^{-x}$, $\vec{y}_p' = A\vec{y}_p + \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}e^{-x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 \quad 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = -4\alpha_2 \Rightarrow -9\alpha_2 = -1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{9}$$

$$\alpha_1 = -\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_p = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$\vec{y}_A = \vec{y}_h + \vec{y}_p$$