Aufgaben Math. III a ET WS 14/15

1 a) $f(-x) = -f(x)$ ungerade $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$

$\Rightarrow a_j = 0 \quad j = 0, 1, \ldots \quad b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(jx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{x(\pi - x)}_{u} \underbrace{\sin(jx)}_{v'}\,dx$

$= \frac{2}{j\pi} \Big[-x(\pi-x)\cos(jx) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \underbrace{(\pi - 2x)}_{u} \underbrace{\cos(jx)}_{v'}\,dx \Big] = \frac{2}{j^2 \pi} \Big[\underbrace{(\pi - 2x)\sin(jx) \Big|_0^{\pi}}_{=0} + 2 \int_0^{\pi} \sin(jx)\,dx \Big]$

$= -\frac{4}{j^3 \pi} \cos(jx) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{j^3 \pi} \left[1 - (-1)^j \right] \Rightarrow b_{2\nu} = 0, \; b_{2\nu+1} = \frac{8}{(2\nu+1)^3 \pi}$

$\Rightarrow$ da f stetig und stückweise stetig diffbar

$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^3} \sin[(2\nu+1)x]$

b) $f(x)$ ist gerade $\Rightarrow a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(jx)\,dx \quad j = 0, 1, \ldots, b_j = 0$

$\Rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\,dx = \frac{4}{\pi} \left[-\cos\frac{x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \qquad , j \geq 1 \Rightarrow$

$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2} \cos(jx)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sin(j + \tfrac{1}{2})x - \sin(j - \tfrac{1}{2})x \right] dx$

wegen $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{j + \frac{1}{2}} \cos(j + \tfrac{1}{2})x + \frac{1}{j - \frac{1}{2}} \cos(j - \tfrac{1}{2})x \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{j - \frac{1}{2}} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right] = \frac{4}{\pi} \frac{1}{4j^2 - 1}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx) = \frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2 - 1} \cos(jx) \right).$

2) unter der Voraussetzung, dass $u, u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx}$ stetig und aus $L^\infty(\mathbb{R})$ bezgl. der Variablen x sind $\Rightarrow$

Mit $\hat{u}(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x) e^{-isx}\,dx = \mathcal{F}(u)$ gilt.

$\hat{u}_t(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) e^{-isx}\,dx \qquad \hat{u}_{tt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) e^{-isx}\,dx$

$= \mathcal{F}(u_{tt})$

$\mathcal{L}(u_{xx}) = -\omega^2 \mathcal{F}(u) \Rightarrow$

$\mathcal{L}(u_{tt}) = c^2 \mathcal{F}(u_{xx}) \Rightarrow \hat{u}_{tt} = -c^2 \omega^2 \hat{u}$

$\mathcal{L}(u(0,x)) = \hat{u}(0,s) = \mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+s^2}$

$\mathcal{L}(u_t(0,x)) = 0 = \hat{u}_t(0,s) = 0$

$\Rightarrow \hat{u}_{tt} = -c^2 \omega^2 \hat{u}, \quad \hat{u}(0,s) = \frac{2}{1+s^2}, \quad \hat{u}_t(0,s) = 0$

wegen $c\omega > 0 \Rightarrow \hat{u}(t,s) = C_1(s) \cos(c\omega)t + C_2(s) \sin(c\omega)t$

$\hat{u}(0,s) = C_1(s) = \frac{2}{1+s^2} \qquad \hat{u}_t(0,s) = -c\,\omega\, C_2(s) = 0 \Rightarrow C_2(s) = 0$

$\Rightarrow \hat{u}(t,s) = \frac{2}{1+s^2} \cos(c\omega t) \qquad , u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{1+s^2} \cos(c\omega t) \right)$

3) $w = \frac{z+1}{z+i}$ ist eine lineare Transformation $\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix} \neq 0\right)$ und führt daher Kreise und Geraden in Kreise und Geraden über.

a) Da $z_1 = -i$ $z_2 = -1$ und $z_3 = 1$ auf dem Kreis $|z| = 1$ liegen, ist das Bild eine Gerade, denn $w(-i) = \infty$, $w(-1) = 0$ und $w(1) = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$ $\Rightarrow$ Bild der Kreislinie $|z| = 1$ ist die Gerade $w = t(1-i)$ $t \in \mathbb{R}$.

b) Die Punkte $0, 1, \infty$ liegen auf der reellen Achse
$w(0) = -i$, $w(1) = \frac{2}{1+i} = 1-i$, $w(\infty) = 1$. Diese Punkte liegen in den drei Ecken $(0,-1)$, $(1,-1)$ und $(1,0)$ des Quadrates mit Seitenlänge 1 $\Rightarrow$ mit $w = u + iv$ gilt. $(u-\frac{1}{2})^2 + (v+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$.
Die Punkt $0, -i, \infty$ liegen auf der imaginären Achse wegen $w(-i) = \infty$, $w(0) = -i$, $w(\infty) = 1$ $\Rightarrow$ Bild ist die Gerade
$w = t + (1-t)(-i) = -i + t(1+i)$, $t \in \mathbb{R}$

4) vorgerechnet: a

b) $u = e^{-x} \sin y \Rightarrow u_x = -e^{-x} \sin y \quad u_y = e^{-x} \cos y$
$u_{xx} = e^{-x} \sin y$, $u_{yy} = -e^{-x} \sin y \Rightarrow \Delta u \equiv 0$ also u harmonisch auf $\mathbb{C}$
Berechnung der konjugierten $v(x,y)$: Cauchy-Riemann Dgln.
$u_x = v_y = -e^{-x} \sin y$, $v_x = -u_y = -e^{-x} \cos y$
$\Rightarrow v(x,y) = \int v_x\,dx + \varphi(y) = \int -e^{-x} \cos y\,dx + \varphi(y) = e^{-x} \cos y + \varphi(y)$
$\Rightarrow v_y = -e^{-x} \sin y + \varphi'(y) = -e^{-x} \sin y \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$.
$\Rightarrow v = e^{-x} \cos y + c \quad \Rightarrow [\,f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$
$= e^{-x} \sin y + i(e^{-x} \cos y + c) = e^{-x}(\sin y + i \cos y) + ic$
$= i e^{-x}(\cos y - i \sin y) + ic = i[e^{-x} e^{-iy} + c] = i(e^{-z} + c).\,]$

5a) vorgerechnet

b) $f(z) = \frac{z}{z^4+2z^2+1} = \frac{z}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{(z-i)^2(z+i)^2} \Rightarrow z = \pm i$

sind jeweis 2-fache Polstellen f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}(z-i)^2 f(z) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z+i)^2} = \lim_{z \to i} \frac{i-z}{(z+i)^3} = 0$

$\operatorname{Res} f(-i) = \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz}(z+i)^2 f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-i)^2} = \lim_{z \to -i} \frac{-i-z}{(z-i)^3} = 0$.

6a) Die rationale Funktion $f(z) = \frac{z^2}{z^4+16}$ besitzt genau die Polstellen $z_j = \sqrt[4]{-16} = \sqrt{2}(1+i)\,\omega_{4,j}$; $\omega_{4,j} = 1, i, -1, -i$ sind die primitiven 4ten Einheitswurzeln. $j = 0, 1, 2, 3$

Der Zählergrad ist 2 und der Nennergrad 4, also gilt (siehe Vorlesung)

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^{\pi} f(Re^{i\vartheta})\, iRe^{i\vartheta}\, d\vartheta = 0$$

Ist also Γ_R der positiv orientierte Rand des oberen Halbkreis

$H_R = \{z \mid |z| \le R,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$, dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \left[\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(Re^{i\vartheta})\, iRe^{i\vartheta}\, d\vartheta \right]$$

$$= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res} f(z_j) \quad \text{(nach dem Residuensatz)}$$

$\operatorname{Im} z_0 = \sqrt{2}(1+i) > 0 \quad \operatorname{Im} z_1 = i\sqrt{2}(1+i) > 0 \quad \operatorname{Im} z_2 = -\operatorname{Im} z_0 < 0$

$\operatorname{Im} z_3 = -\operatorname{Im} z_1 < 0$, also ist

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\pi i \left[\operatorname{Res} f(z_0) + \operatorname{Res} f(z_1) \right.$$

Da die Polstellen $z_j = \sqrt{2}(1+i)\,\omega_{4,j}$ einfach sind $\Rightarrow$

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0) z^2}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)}$$

und wegen $z_2 = -z_0$, $z_3 = -z_1$

$$\Rightarrow \operatorname{Res} f(z_0) = \frac{z_0^2}{2z_0(z_0-z_1)(z_0+z_1)} = \frac{1}{2} \frac{z_0}{z_0^2 - z_1^2} = \frac{\sqrt{2}}{16}(1-i)$$

Analog ist

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) f(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{z^2}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)(z_1-z_3)}$$

$$= \frac{z_1^2}{2z_1(z_1^2 - z_0^2)} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}(-1+i)}{2((-1+i)^2 - (1+i)^2)} = \frac{\sqrt{2}}{16}(-1-i)$$

6b) $J = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{\cos x + 2}\, dx$ umwandlung in ein komplexes Integral: $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$\Rightarrow J = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix} + 4}\, dx$ und mit $z = e^{ix}$ gilt $|z| = 1$, $z = e^{ix}$ durläuft den Kreis $|z| = 1$ genau einmal positiv, wenn x von 0 nach 2π läuft, und wegen $z = e^{ix} \Rightarrow dz = i e^{ix} dx$ also

$dx = \frac{1}{i e^{ix}} dz = \frac{1}{i} \frac{1}{z} dz. \Rightarrow$

$J = \int_{|z|=1} \frac{z + \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z} + 4} \frac{1}{i} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4z + 1)} dz$

dies ist nach dem Residuensatz gleich 2π mal Summe der Residuen bei den Polstellen z_j mit $|z_j| < 1$. Aus $z^2 + 4z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$

$\Rightarrow |z_1| = |-2 + \sqrt{3}| < 1$, $|z_2| > 1$

$\Rightarrow$ $J = 2\pi [\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(z_1)]$:

$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 + 1}{z^2 + 4z + 1} = 1$ $\operatorname{Res} f(z_1) = \lim_{z \to -2 + \sqrt{3}} \frac{z^2 + 1}{z(z + 2 +}$

7a) $y'' + 2y' + 10y = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

$\mathcal{L}(y'' + 2y' + 10y) = \mathcal{L}(\cos x) \Rightarrow$ wegen $y(0) = y'(0) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(y'') = s^2 \mathcal{L}(y)$, $\mathcal{L}(y') = s \mathcal{L}(y)$, $\mathcal{L}(\cos x) = \frac{s}{s^2 + 1}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(y)(s^2 + 2s + 10) = \frac{s}{s^2 + 1}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{s}{(s^2 + 1)((s + 1)^2 + 9)}$ $\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 10)}\right)$

Partialbruchzerlegung $\Rightarrow$

$\frac{s}{(s^2 + 1)((s + 1)^2 + 9)} = \frac{1}{77}\left(\frac{-9s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{9s}{(s + 1)^2 + 9} + \frac{20}{(s + 1)^2 + 9}\right)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{77} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-9s}{s^2 + 1} - \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{9s}{(s + 1)^2 + 9} + \frac{20}{(s + 1)^2 + 9}\right)$

$= \frac{1}{77}\left[-9\cos x - 2\sin x + e^{-x}(3\cos(3x) + \frac{20}{} \sin(3x)\right]$

7b) $x'' + 9x = \delta(t-a) \quad x'(0) = x(0) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x'' + 9x) = \mathcal{L}(x) \cdot (s^2 + 9) = \mathcal{L}(\delta(t-a))$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x)(s^2+9) = e^{-as} \Rightarrow \mathcal{L}(x) = e^{-as} \frac{1}{s^2+9}$

$\Rightarrow$ Verschiebungssatz

$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t \leq a \\ f(t+a) & \text{für } t \geq a \end{cases}$ wobei

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)$ ist $\quad$ Nun ist $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right)$

$= \frac{1}{3} \sin(3t)$

$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ \frac{1}{3} \sin(3(t-a)) & \text{für } t \geq a \end{cases}$

Da die letzten Aufgaben unter erschwerten Bedingungen gerechnet wurden, können sich leichte Rechenfehler eingeschlichen haben.