Beispiel zu iterative Berechnung von Nullstellen.

Bestimmung der Nullstelle $\bar{x}$ von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f: x \to e^{-x} - x$ , also der Lösung der Gleichung

$x = e^{-x} = g(x)$ , auf 4 Nachkomastellen genau.

Da $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ auf $\mathbb{R}$ ist

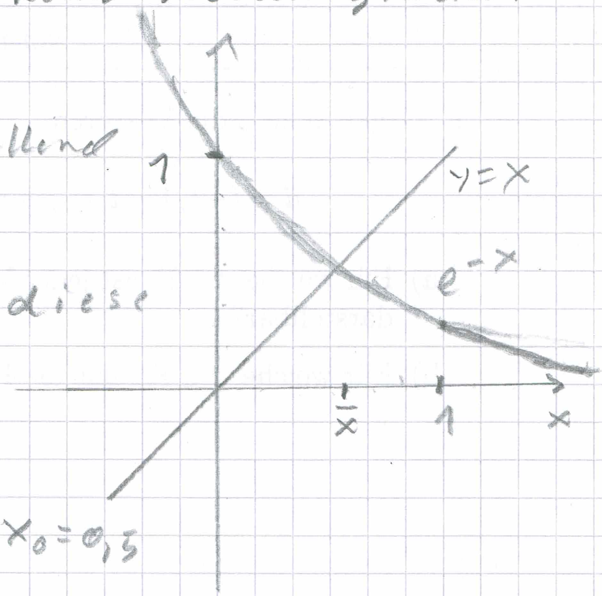
$\Rightarrow$ $f$ ist streng monoton fallend

auf $\mathbb{R}$ und besitzt also

genau eine Nullstelle $\bar{x}$, diese

Liegt in der „Nähe" von

$\bar{x}_0 = 0{,}5$ .




Wir wählen diesen Wert $x_0 = 0{,}5$

als Startwert

1. Einfache Iteration:

Zu lösen $x = g(x) = e^{-x}$ , wegen

$g'(x) = -e^{-x}$ gilt etwa für $x \geq \frac{1}{4}$ $|g'(x)| = |e^{-x}| \leq e^{-\frac{1}{4}} < 1$

$\Rightarrow$ Das Iterationsverfahren $x_{n+1} = g(x_n)$ , $x_0 = 0{,}5$ konvergiert gegen $\bar{x}$

$x_0 = 0{,}5 \Rightarrow x_1 = g(x_0) = e^{-0{,}5} \approx 0{,}606531$

$x_2 = e^{-x_1} \approx 0{,}545239$ $\quad x_3 = e^{-x_2} \approx 0{,}579703$

$x_4 \approx 0{,}560065$ $\quad x_5 \approx 0{,}571172$ $\quad x_6 \approx 0{,}564863$

$x_7 \approx 0{,}568438$ $\quad x_8 \approx 0{,}566409$ $\quad x_9 \approx 0{,}567560$

$x_{10} \approx 0{,}566907$ $\quad x_{11} \approx 0{,}56711$ $\quad x_{12} \approx 0{,}567067$

$x_{13} \approx 0{,}567186$ $\quad x_{14} \approx 0{,}56711$ $\quad x_{15} \approx 0{,}56715$

$x_{16} \approx 0{,}56711$ $\Rightarrow$

$\bar{x} = 0{,}5671 \pm 5 \cdot 10^{-5}$

Das Verfahren ist einfach, aber mit einer relativ großen Anzahl von Rechenschritten verbunden.

Das Newton-Verfahren kommt mit wesentlich weniger Schritten aus:

Also $f(x) = e^{-\bar{x}} - \bar{x} = 0$ $\quad f'(x) = -e^{-x} - 1$

$x_0 = 0{,}5 \quad , \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n + \frac{e^{-x_n} - x_n}{e^{-x_n} + 1}$

$\Rightarrow x_1 = 0{,}5 + \frac{e^{-0{,}5} - 0{,}5}{e^{-0{,}5} + 1} \approx 0{,}566311$

$x_2 = x_1 + \frac{e^{-x_1} - x_1}{e^{-x_1} + 1} \approx 0{,}567143 \quad x_3 \approx 0{,}567143$

$\Rightarrow \quad \bar{x} = 0{,}567143 \pm 5 \cdot 10^{-7}$

Hier wird das Ergebnis in 3 Schritten erreicht,

i.

Interpolationspolynome:

Gegeben sei eine sogenannte Wertetabelle

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | . . . | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | | $y_n$ |

wobei $x_0 < x_1 < . < x_n$

gelten soll. Gesucht ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit

$P(x_j) = y_j \quad j = 0, 1, ., n$

Es gibt für dieses Problem natürlich genau eine Lösung $P_0(x)$

Eine häufig benutzte Darstellung von $P_0$ ist die Lagrangesche.:

Man bildet die sogenannten Grundpolynome:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \text{ dann ist}$$

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } j \neq k \text{ ist} \\ 1 & \text{, wenn } j = k \end{cases}$$

und damit ist

$$P_0(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$ das gesuchte Interpolationspolynom

Bsp.:

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
| $y$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $3$ |

Grundpolynome

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)1(1-2)} = -\frac{1}{2}x(x+1)(x-2)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{1}{6}x(x+1)(x-1)$$

$$\Rightarrow P_0(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$$= -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) + 3 \cdot \frac{1}{6}x(x+1)(x-1)$$

$$P_0(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 1$$

Eine Anwendung von Interpolationspolynomen findet man in der numerischen Integration.

Häufig besitzt eine zu integrierende Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ keine durch bekannte Funktionen darstellbare Stammfunktion, dann benutzen einige Verfahren zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ zu einer Zerlegung von $[a,b]$ in Teilpunkten $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ Interpolationspolynome mit $(x_j, f(x_j))$ $j=0,\dots,n$, wobei für größere $n$ nicht die Interpolationspolynome vom ~~Grad~~ $\leq n$ gewählt werden, da hogradige Polynome wegen der sehr großen Schwankungen an den Intervallenden ungeeignet sind, sondern in der Regel, stückweise auf Teilintervallen $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}$ durch Interpolationspolynome mit Grad $\leq k$, (dann muss $n = k \cdot m$ $(m\in\mathbb{N})$ sein, $j=0, k, 2k, \dots, (m-1)k$)

$k=1$ Trapezregel

$k=2$ Simpsonformel

Hier soll nur die Simpson-formel vorgestellt werden: (Siehe Skript Math. I S. 87, 88)

Beispiel: zur Simpsonformel

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $[a,b]$ wird in $n=2m$ $(m\in\mathbb{N})$ Teilintervalle der „Länge" $h=\frac{b-a}{n}$ unterteilt

$a=x_0$, $x_j=x_0+jh$ $j=1,\dots,2m$ $x_{2m}=b$

$$S_n=\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{\nu=1}^{m-1}f(x_{2\nu})+4\sum_{\nu=1}^{m-1}f(x_{2\nu+1})\right]$$

Also für $m=2$ $(n=4)$

$$S_4=\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+2\left(f(x_2)\right)+4\left(f(x_1)+f(x_3)\right)\right]$$

$$h=\frac{b-a}{4}.$$

Sei nun $f(x) = e^{-x^2}$ $[a,b] = [0,1]$ $n = 4$, $h = \frac{1}{4}$

Dann ist $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$ $x_2 = \frac{1}{2}$ $x_3 = \frac{3}{4}$ $x_4 = 1$

Wertetabelle

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ | $0{,}939413$ | $0{,}778801$ | $0{,}569783$ | $0{,}367879$ |

$$\Rightarrow S_4 = \frac{1}{12}\left[f(0) + f(1) + 2f(\tfrac{2}{4}) + 4\left(f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{3}{4})\right)\right]$$

$$\approx \frac{1}{12}\left[1 + 0{,}367879 + 2\cdot 0{,}778801 + 4\left(0{,}939413 + 0{,}569783\right)\right]$$

$$\approx 0{,}7468$$

Die Fehlerabschätzung ist in diesem Fall mit

$$S_2 \approx \frac{1}{6}\left[1 + 0{,}367879 + 4\cdot 0{,}778801\right] \approx 0{,}74719$$

Ist $\Delta_4 \approx \frac{1}{15}\left[S_4 - S_2\right] < 5\cdot 10^{-5}$ also sind 4 Nachkommastellen genau. (Heuristisch!)

Methode der kleinsten Fehlerquadrate:

1) Ausgleichsgerade:

Gegeben sei wieder eine Wertetabell

| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | | $y_n$ |

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$ $n \geq 1$

gesucht eine Gerade $y = ax + b$ für welche die Summe $\sum_{j=0}^{n} (y_j - ax_j + b)^2$ minimal wird.

Dies wurde als Beispiel für Extremwerte von Funktionen von 2 Variablen behandelt.

2. Für einer zu ermittelden Größe $\bar{x}$ werden in $n$ Versuchen die Werte $x_1, \dots, x_n$ ermittelt. Welcher Wert für $\bar{x}$ ist als „beste" Annäherung an $\bar{x}$ durch dies Messwerte zu ermitteln?

Naheliegend ist auch hier das Minimum von $f(x) = \sum_{j=1}^{n} (x - x_j)^2$ zu ermitteln.

Krit. Punkte. $f'(x) = 2\sum_{j=1}^{n}(x - x_j) = 0$

$\Rightarrow \quad nx = \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ d. h.

Als $x$ ist das arithmetische Mittel

$x_a = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ zu wählen.

Dieses werden wir noch im abschließenden Kapitel (Wahrscheinlichkeit und Statistik) benötigen.

Zuletzt wollen wir noch auf Näherungsmethoden zur Lösung von Anfangswertprobleme eingehen.