Partialbruchzerlegung:

Es seien $P, Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome mit grad $P = n \geq 0$ und grad $Q = m \geq 1$

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion

Zur Bestimmung der Stammfunktionen von R geht man folgendermaßen vor:

1. Ist $n \geq m$, dann dividiert man $P : Q$:

$\Rightarrow R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$ mit grad $P_2 < m$

Da das Integral

$\int P_1(x)dx$ einfach zu bestimmen ist, bleibt die Integration über $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit grad $P <$ grad Q

zu untersuchen.

2. Schritt Bestimmung der Faktorzerlegung des Nennerpolynoms Q.

(Vorher überprüfen, ob ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $Q'(x) = a\,P(x)$, dann ist $\int R(x)\,dx = a \int \frac{Q'(x)}{Q(x)}dx$ $= \ln|Q(x)| + c$.) (Das ist nur möglich, wenn $n = m-1$ gilt).

Da man eine Faktorzerlegung des Nenners Q nur erhält, wenn die Nullstellen von Q bekannt sind, sollte man zunächst überprüfen, ob P und Q gemeinsame Nullstellen besitzen, wenn ja, dann kürzen.

3. Partialbruchansatz für P/Q:

Der Partialbruchansatz besteht aus folgenden Summanden.

a) Für eine j-fache Nullstelle x_1 von Q, $x_1 \in \mathbb{R}$

$\frac{a_{j,1}}{(x-x_1)^j} + \frac{a_{j-1,1}}{(x-x_1)^{j-1}} + \cdots + \frac{a_{1,1}}{x-x_1}$ $\quad j \geq 1$

b) Für ein Paar komplexer Nullstellen $z_1, \overline{z_1}$ (einfache Nullst.)

$\frac{b_1 x + c_1}{x^2 + 2\alpha x + \beta}$ (mit $\alpha = \operatorname{Re} z_1$, $\beta = |z_1|^2$

(c) den Fall mehrfacher komplexer Nullstellen lassen wir hier bei Seite)
wobei die Koeffizienten $a_{j,k}$ und b_j und c_j unbestimmt sind.

Dann wird dieser Ansatz wieder auf den gemeinsamen Nenner Q gebracht

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\tilde{P}(x, a_1, \dots, b_1, c_1, \dots)}{Q(x)}$$ und dann werden

aus $P(x) = \tilde{P}(x, a_1, \dots, b_1, c_1, \dots)$ durch Koeffizientenvergleich die Koeffizienten berechnet.

Die Integration der Partialbrüche entnehmen Sie bitte wieder dem Skript.

Beispiele:

1.) $R(x) = \frac{x^4 + x^3}{x^2 - 1}$ Da $x^4 + x^3 = x^3(x+1)$ und $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ gilt $\Rightarrow R(x) = \frac{x^3(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^3}{x-1}$

Hier ist der Zählergrad > Nennergrad also

$x^3 : x - 1 = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \int \frac{x^3}{x-1} dx = \int (x^2 + x + 1) dx$
$+ \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + c$

2.) $R(x) = \frac{1 + 2x - x^3}{x^4 - 2x^2 - 4x + 7}$ wegen $Q'(x) = 4x^3 - 4x - 4$
$= -4(1 + 2x - x^3)$

$\Rightarrow R(x) = -\frac{1}{4} \frac{Q'(x)}{Q(x)} \Rightarrow \int R(x)\, dx = -\frac{1}{4} \ln|Q(x)| + c$

$\Rightarrow \int R(x)\, dx = -\frac{1}{4} \ln|x^4 - 2x^2 - 4x + 7| + c$

3.) $R(x) = \frac{x+1}{x^3 - 3x + 2}$ Hier ist Grad $P = 1 <$ Grad $Q = 3$

also Partialbruchzerlegung: Man sieht dass Q die Nullstelle 1 hat und erhält:

$Q(x) = (x+2)(x-1)^2$, damit ist der Ansatz:

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2} \Rightarrow$$

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a(x+2)+b(x+2)(x-1)+c(x-1)^2}{(x+2)(x-1)^2} \Rightarrow \text{(Vergleich der Zähler)}$$

$x+1 = x^2(b+c) + x(a+b-2c) + 2a-2b+c$ Koeff.-Vergleich

$\Rightarrow b+c=0 \wedge a+b-2c=1 \wedge 2a-2b+c=1$

$\Rightarrow c=-b \wedge a+3b=1 \wedge 2a-3b=1 \Rightarrow a=\frac{2}{3},\ b=\frac{1}{9},$

$c=-\frac{1}{9} \Rightarrow \int R(x)\,dx = \int\left(\frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{9}\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$= -\frac{2}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\ln|x+2| + c$$

4) $R(x) = \frac{1}{x^3+x^2-2}$ Partialbruchzerlegung.

$Q(x) = x^3+x^2-2$ besitzt die reelle Nullstelle $x_1=1$

	1	1	0	-2
1		1	2	2
	1	2	2	0

$\Rightarrow Q(x) = (x-1)(x^2+2x+2)$ also besitzt Q die einfache reelle Nullst. $x_1=1$ und die komplexen Nullstellen $-1\pm i$.

$\Rightarrow$ Partialbruch:

$$\Rightarrow R(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

$\Rightarrow a(x^2+2x+2) + (x-1)(bx+c) = 1$

$\Rightarrow x^2(a+b) + x(2a-b+c) + 2a-c = 1$

$\Rightarrow a+b=0 \wedge 2a-b+c=0 \wedge 2a-c=1$

$\Rightarrow b=-a \wedge 3a+c=0 \wedge 2a-c=1 \Rightarrow$

$a=\frac{1}{5},\ b=-\frac{1}{5},\ c=-\frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \int R(x)\,dx = \frac{1}{5}\left[\int\frac{dx}{x-1} - \int\frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx\right]$$

$$J_1 = \int\frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \overset{J_1}{\frac{2x+6}{x^2+2x+2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int\frac{2}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \int\frac{2}{(x+1)^2+1}\,dx$$

Subst. $x+1=u$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + 2\int\frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \arctan u + c$$

$$\Rightarrow J_1 = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+1) + 2\arctan(x+1) + c$$

$$\Rightarrow \int R(x)\,dx = \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln(x^2+2x+1) - \frac{2}{5}\arctan(x+1) + c$$