5. Aufgabenblatt Math. I ET   WS 13/14

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenw. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$ $\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \vec{a} = t(1,1)$, $\lambda_2 = 2$ $\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow \vec{a}_2 = t(1,-1)$

$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ Eigenwerte

Eigenvektoren $\lambda_1 = 1+i$: $\begin{array}{cc|c} 1-i & -1 & 0 \\ 2 & -1-i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$ $(1+i)$ $\Rightarrow \vec{a}_1 = t(1, 1-i)$

$\lambda_2 = 2 - i \Rightarrow$ $\begin{array}{cc|c} 1+i & -1 & 0 \\ 2 & -1+i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$ $\cdot(-1+i)$ $\Rightarrow \vec{a}_2 = t(1, 1+i)$

$C = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ Eigenwerte $\begin{vmatrix} 11-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 9-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 9-\lambda & -1 \\ 0 & 8-\lambda & 8-\lambda \end{vmatrix}$

$= (8-\lambda) \begin{vmatrix} 11-\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 10-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (8-\lambda) \begin{vmatrix} 11-\lambda & -2 \\ -1 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(\lambda^2 - 21\lambda + 108)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 12$

Eigenvektoren (normiert): $(C - \lambda_i E)\vec{a} = \vec{0}$: zu

$\lambda_1 = 8$ $\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$ $\lambda_2 = 9$ $\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$ $\lambda_3 = 12$ $\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$

$a_1 = 0$ $a_2 = a_3 \Rightarrow \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ $\Rightarrow \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ $\vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$

Mit $U = (\vec{a}_1^T\ \vec{a}_2^T\ \vec{a}_3^T) \Rightarrow U^T C\, U = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. (siehe Vorl.)

2.) Es ist $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16$

$= (x, y) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 16 = 0$ Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 - 25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -2$, Die Eigenvektoren bilden die Hauptachsen

zu $\lambda_1 = 8$: $\begin{array}{cc|c} -5 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array} \Rightarrow \vec{a}_1 = t(1,1)$

$\lambda_2 = -2$ $\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{array}$ $\vec{a}_2 = t(1,-1)$

3a) $a_n = \frac{2n^2 + n}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n^{-2}}{n^{-2}} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})(1 + 2\cdot\frac{1}{n})} \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty}(2 + \frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})(1+2\cdot\frac{1}{n})} = \frac{2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{(1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})(1 + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})} = 2$

Grenzwertsatz!

3b) $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\frac{n^{-\frac{1}{2}}}{n^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \underset{\text{Grenzwertsatz}}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$

c) $a_n = \frac{(-3)^{n+1}+2^n}{2^n-3^{n+1}}\cdot\frac{3^{-n}}{3^{-n}} = \frac{-3(-1)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{3}}$. wegen

$0<\frac{2}{3}<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$, aber $(-1)^n$ alterniert.

Teilfolgen: $n=2j$: $a_{2j} = \frac{-3+\left(\frac{2}{3}\right)^{2j}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2j}-\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$\lim_{j\to\infty} a_{2j} = \frac{-3}{-\frac{1}{3}} = 9$

$n=2j+1 \Rightarrow a_{2j+1} = \frac{3+\left(\frac{2}{3}\right)^{2j+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2j+1}-\frac{1}{3}} \Rightarrow \lim_{j\to\infty} a_{2j+1} = -9$

$\Rightarrow$ a_n nicht konvergiert und a_n besitzt die Häufungspunkte ± 9

4) $a_{n+1} = \sqrt{9a_n}$ $\quad a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = \sqrt{9} = 3 \quad a_3 = \sqrt{9\cdot 3} = 3\sqrt{3}$ ..

Ist a_n monoton wachsend? zunächst ist $a_n > 0$ (folgt induktiv) und damit $a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1}^2 > a_n^2$

$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_n^2 > 0$ Nun ist $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 9a_n - a_n^2 = a_n(9-a_n)$

Das wäre >0, wenn $a_n < 9$ gilt.

Nachweis induktiv: $a_1 = 1 < 9$ ✓ Ist für ein $n\geq 1$

$a_n < 9 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{9a_n} < \sqrt{9\cdot 9} = 9$ $\square$ Damit gilt

$a_n < 9$ und $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_n$ monoton wachsend und beschränkt $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$ ex.

$\Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{9a_n} \underset{\text{Grenzwertsatz}}{=} \sqrt{9a} \Rightarrow a^2 = 9a$

$\Rightarrow a = 9$.

5a) $s_m = \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n^2+5n+6} = \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$ $\quad \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+2}+\frac{b}{n+3}$

$\Rightarrow 1 = n(a+b)+3a+2b \Rightarrow b=-a \wedge 3a+2b=1 \Rightarrow a=1, b=-1$

$\Rightarrow s_n = \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n+2} - \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{m+3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{m+3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6} = \lim_{m\to\infty} s_m = \frac{1}{2}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k}(-4)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} -4\, 3^{-2k}(-4)^k = -4\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)^k$

$= -4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)^{k-1} \underset{\nu=k-1}{=} \frac{16}{9}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)^{\nu} \underset{\text{geom. R.}}{=} \frac{16}{9}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{9}} = \frac{16}{13}$